জ্যামিতি

[সপ্তম শ্রেণীর জন্য]

যাদবচন্দ্র চক্রবর্তী এম্. এ

পশ্চিম বঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদের ১৯৭৪ সন হইতে প্রবর্তিত নূতন সিলেবাস অনুসারে লিখিত

জ্যামিতি

(সপ্তম শ্রেণীর জন্য)

আলিগড়ের এম্. এ. ও. কলেজের গণিত-শাস্ত্রের ভূতপূর্ব অধ্যাপক,
ইংরেজী পাটীগণিত-প্রণেতা

যাদবচন্দ্র চক্রবর্তী এম্. এ. প্রণীত

শ্রীঅতুলচন্দ্র চক্রবর্তী বি. এস-সি. কর্তৃক
পরিবর্তিত ও সংকলিত

প্রাপ্তিস্থান

পি. সি. চক্রবর্তী এণ্ড ব্রাদাস

৭৪, বেচু চ্যাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা—৯

৮৫, আচার্য প্রফুল্লচন্দ্র রোড,
কলিকাতা—৯
সান্যাল এণ্ড কোং হইতে
শ্রীঅতুলচন্দ্র চক্রবর্তী দ্বারা প্রকাশিত।

প্রথম সংস্করণ—১৯৭৫

Paper used for printing of this book was made available by the Govt. of India at a concessional rate.

মূল্য—দুই টাকা পঁচিশ পয়সা

৮৫, আচার্য প্রফুল্লচন্দ্র রোড,
কলিকাতা—৯
"ভারত মিহির প্রেসে"
শ্রীঅতুলচন্দ্র চক্রবর্তী দ্বারা মুদ্রিত।

প্রকাশকের নিবেদন

পশ্চিম বঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদের ১৯৭৪ সন হইতে প্রবর্তিত পাঠ্য-সূচী অনুযায়ী এবং ইহার অন্তর্গত মূল নীতিগুলির প্রতি লক্ষ্য রাখিয়া সম্ভব মত সহজবোধ্য করিয়া এই পুস্তক প্রকাশ করা হইল।

আশা করি এই পুস্তক ছাত্রগণের চিত্তাকর্ষণ করিতে সমর্থ হইবে এবং ইহা পাঠে তাহারা সহজেই জ্যামিতির বিষয়গুলি আয়ত্ত করিতে পারিবে। বলা বাহুল্য এই পুস্তকের উন্নতিকল্পে শিক্ষক মহাশয়গণের উপদেশ শ্রদ্ধার সহিত গৃহীত হইবে। ইতি—

প্রকাশক

SYLLABUS FOR CLASS VII

GEOMETRY (30 marks)

[*The aim is same as in Class VI*]

1. (i) Simple ideas of translation and rotation by objects found in daily life—their properties.

   (ii) Idea of rotational symmetry in geometrical figures like equilateral triangle, parallelogram, circle etc.

   (iii) Composition of transformations ; congruence.

2. Constructions :

   (i) Angle congruent to a given angle.

   (ii) Constructions of triangles with given parts.

   (iii) Constructions of quadrilaterals with given parts.

সূচীপত্র

জ্যামিতি

উপক্রমণিকা

জ্যা—পৃথিবী ও মিতি—পরিমাপ। সুতরাং জ্যামিতি শব্দের ব্যুৎপত্তিগত অর্থ, জমি পরিমাপ সম্পর্কীয় শাস্ত্র।

প্রকৃতপক্ষে ক্ষেত্র পরিমাণ নির্ধারণের জন্যই জ্যামিতির প্রথম উদ্ভব হয়। বহু প্রাচীন কালে ভারতে আর্য ঋষিগণ যাগযজ্ঞের জন্য ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদি বিভিন্ন আকারের বেদি নির্মাণ করিতে গিয়া জ্যামিতি শাস্ত্রের প্রথম প্রবর্তন করিয়া থাকেন। শাস্ত্র সম্মত বিবিধ আকারের বেদি নির্মাণ প্রণালী তাঁহারা সূত্রাকারে লিপিবদ্ধ করেন। কতকগুলি জ্যামিতিক সূত্র ও তথ্যকে কেন্দ্র করিয়া ঐ সকল সূত্র রচিত হয়। ইহারা 'শুল্বসূত্র' নামে পরিচিত। পরবর্তীকালে আর্যভট্ট, ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য প্রভৃতি হিন্দু মণীষিগণ এই শাস্ত্রের আরও উন্নতি করেন। ভাস্কর তাঁহার 'লীলাবতী'তে নানারূপ ক্ষেত্র ও বস্তু মাপের নানা পদ্ধতির উল্লেখ করেন।

মিশরবাসী ও গ্রীকদের অবদান, এ বিষয়ে বিশেষ উল্লেখযোগ্য। মিশরে বর্ষাকালে নীল নদের প্রবল প্লাবনে জমির সীমানা ও বাঁধ বিলুপ্ত হইয়া যাইত। বর্ষার অন্তে আবার ঐ সকল বাঁধ ইত্যাদি নির্মাণ করিতে হইত। সেই সময় নানা ধরণের মাপের প্রয়োজন হইত এবং ইহার মধ্য দিয়া শাস্ত্রটির প্রভূত উন্নতি সাধন ঘটে। রোম দেশে নগর তৈয়ারী ইত্যাদির ক্ষেত্রে জ্যামিতির প্রচলন হয়। গ্রীকরা মিশরীয়দের নিকট হইতে জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করেন। প্রসিদ্ধ গ্রীক পণ্ডিত 'থ্যালস্' প্রথম মিশর হইতে জ্যামিতি শিক্ষা করিয়া গ্রীসে উহা প্রচার করেন।

বহির্ভারতে জ্যামিতির প্রধান রচয়িতা হিসাবে যিনি খ্যাতি লাভ করিয়াছেন তিনি বিশ্ব-বিশ্রুত গণিতশাস্ত্রবিদ ইউক্লিড (Euclid)। তিনি প্রায় ২৩ শত বৎসর পূর্বে (৩৩০ খ্রীঃ পূঃ) গ্রীসদেশে জন্ম গ্রহন করেন ও মিশরের আলেকজান্দ্রিয়া বিদ্যাপীঠে শিক্ষা লাভ করিয়া ছিলেন। তাঁহারই রচিত জ্যামিতি এ যাবৎ পৃথিবীতে এই শাস্ত্র অনুশীলনে পথ নির্দেশ দিয়াছে।

ইউক্লিডের পূর্বে পিথাগোরাস, অ্যারিস্টটল প্রভৃতি বিজ্ঞান সাধক দ্বারা এই শাস্ত্রের বিশেষ উন্নতি সাধন হয়। কিন্তু প্রথম দিকে জ্যামিতির সত্যগুলি সুসংবদ্ধ ভাবে লিপিবদ্ধ করিবার কোন ব্যবস্থা ছিলনা। ইউক্লিডই প্রথম জ্যামিতিক তথ্যগুলিকে ক্রম পর্যায়ে সাজাইয়া একটি গ্রন্থ রচনা করেন, যাহার নাম 'Euclid's Elements'. ইউক্লিডের পরবর্তীকালে, আর্কিমিডিস, ল্যাপ্লাস প্রভৃতি মনীষিগণ এই শাস্ত্রের বহু তথ্য আবিষ্কার করেন। নব্য-জ্যামিতি ইউক্লিডের গ্রন্থের পরিবর্তিতরূপ (Neo-Euclidian)।

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে জ্যামিতির ব্যবহার প্রচুর। আমাদের চারিদিকে ঘর বাড়ী, কল কারখানা, যন্ত্রপাতি, বিভিন্ন শহর প্রস্তুত ইত্যাদিতে এই শাস্ত্রের ব্যবহার প্রচুর। প্রকৃতিতে বিভিন্ন গাছ পালা, লতাপাতা, সূর্য, পৃথিবী, চন্দ্র ইত্যাদির মধ্যে বিবিধ জ্যামিতিক চিত্রের আকার দেখিতে পাওয়া যায়। বাড়ি ঘর, জানালা দরজা, চেয়ার টেবিল, আলমারী, ব্ল্যাকবোর্ড ইত্যাদি নির্মাণ করিতে জ্যামিতি জ্ঞানের বিশেষ প্রয়োজন হয়।

জ্যামিতির মোটামুটি দুইটি ভাগ—একটিকে বলা হয় তত্ত্বীয় (theoretical) এবং অপরটিকে বলা হয় ব্যবহারিক (practical) জ্যামিতি। জ্যামিতির যে অংশে নানারূপ চিত্রের তত্ত্ব ও যুক্তি বিচার করিয়া নানা বিষয়ে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাহাকে **তত্ত্বীয় জ্যামিতি** বলে। আবার জ্যামিতির যে অংশে বিভিন্ন জ্যামিতিক

চিত্রের আকার ও পরিমাণ নির্ধারণ ও অঙ্কন প্রণালীর বিষয় আলোচনা করা হয় তাহাকে **ব্যবহারিক জ্যামিতি** বলে।

প্রতিজ্ঞা (Proposition)—জ্যামিতির প্রধান প্রধান আলোচ্য বিষয়গুলিকে প্রতিজ্ঞা বলে। ইহা দুই প্রকার। সম্পাদ্য (Problem) এবং উপপাদ্য (Theorem)। যে প্রতিজ্ঞায় কোন অঙ্কন কার্যাদি করিতে হয়, তাহাকে **সম্পাদ্য** এবং যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক সত্য প্রমাণ করিতে হয়, তাহাকে **উপপাদ্য** বলে।

উভয়-প্রকার জ্যামিতি অধ্যয়ন করিতে হইলে জ্যামিতিতে কতকগুলি সাংকেতিক চিহ্নের প্রয়োজন হয়। তাহা নিম্নে প্রদত্ত হইল।

চিহ্ন	বাংলা	ইংরাজী
$\therefore$	অতএব	therefore.
$\because$	যেহেতু	because.
$\angle$	কোণ	angle.
সম $\llcorner$	সমকোণ	right angle.
$\triangle$	ত্রিভুজ	triangle.
▱	সামান্তরিক	parallelogram.
□	বর্গক্ষেত্র	square.
▭	আয়তক্ষেত্র	rectangle.
$\odot$	বৃত্ত	circle.
$=$	সমান	equal.
$\equiv$	সর্বসম	congruent.
$AB > CD$.	AB, CD অপেক্ষা বৃহত্তর	AB is greater than CD.
$AB < CD$.	AB, CD অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর	AB is less than CD.

AB ∥ CD. AB ও CD সমান্তরাল, AB is parallel to CD

AB⊥CD. AB, CDএর উপর লম্ব, AB is perpendicular to CD

পূর্বোক্ত সাংকেতিক চিহ্ন ছাড়া নিম্নের চিহ্নগুলিও ব্যবহৃত হয়।

$\overline{AB}$, যে সরল রেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A ও B

$\overleftrightarrow{AB}$, যে সরলরেখা উভয় দিকেই যথেচ্ছ বর্ধিত হইতে পারে।

$\overrightarrow{AB}$, যে সরল রেখা তীরচিহ্নিত নির্দিষ্ট দিকে বর্ধিত হইতে পারে।

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB}$ এর সর্বসম $\overline{DE}$, অর্থাৎ $\overline{AB}$কে $\overline{DE}$ এর উপর স্থাপন করিলে A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং B বিন্দু E বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

∠ABC≅∠DEF. ∠ABC ও ∠DEF পরস্পর সর্বসম।

A→B, কোন বিন্দু B যে কোন পরিবর্তনের ফলে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব।

△ABC = △DEF. ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

△ABC≅△DEF. ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান অর্থাৎ সর্বসম।

প্রথম অধ্যায়

প্রথম পাঠ

চলন ও ঘূর্ণনের সহজ ধারণা—ইহাদের ধর্ম।

1. জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি শাখা বিশেষ। ইহা তুই প্রকার, ব্যবহারিক জ্যামিতি ও তত্বীয় জ্যামিতি। কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের উপর ইহারা নির্ভরশীল। ইউক্লিড কতকগুলি জ্যামিতিক তথ্য সুসংবদ্ধভাবে লিপিবদ্ধ করেন। শুধু তাহাই নহে তিনি কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করিয়া জ্যামিতিক বিভিন্ন চিত্র অঙ্কন ও প্রমাণ করেন। পরবর্তীকালে তাঁহার জ্যামিতি হইতে নানা শ্রেণীর জ্যামিতি সৃষ্টি হইয়াছে।

ইউক্লিডের পরবর্তী বিজ্ঞানীরা জ্যামিতি সম্বন্ধে নূতন চিন্তাধারা প্রবর্তন করেন। তাঁহাদের মধ্যে Felix Kelin এর নাম অন্যতম। জ্যামিতি, বিজ্ঞানের এমন একটি বিশেষ শাখা যেখানে জ্যামিতিক চিত্রের আকৃতিবিশিষ্ট কোন বস্তুর গতির ফলে ইহার গতিপথ একটি নির্দিষ্ট নিয়মে অপর একটি জ্যামিতি সৃষ্টি করে। ইহাকে **পরিবর্তিত** জ্যামিতি (Transformation Geometry) বলে। প্রতিফলন (Reflection), সমান্তরাল সরণ বা চলন (Translation), ঘূর্ণন (Rotation) ইত্যাদি এক একটি নির্দিষ্ট নিয়ম। এই সকল নিয়মের সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্রের অবস্থার বা অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে।

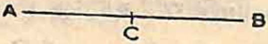
এই সকল নিয়মের ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্রের মূল আকৃতির কোন পরিবর্তন হয় না।

কিন্তু **পরিবর্ধন** (Enlargement) যদিও পরিবর্তনের একটি বিশেষ নিয়ম কিন্তু ইহাতে বস্তুর গঠন ঠিক থাকিলেও আকৃতির বিশেষ পরিবর্তন ঘটে। এই পরিবর্তনকে সাদৃশ্য পরিবর্তন বলা হইয়া থাকে।

পূর্ব শ্রেণীতে প্রতিফলন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। এখানে শুধুমাত্র চলন ও ঘূর্ণন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। কিন্তু এইগুলি আলোচনার পূর্বে কয়েকটি বিষয় আলোচনা করা হইল। এইগুলি চলন ও ঘূর্ণন প্রক্রিয়ায় ব্যবহার করা হইয়াছে।

2. রেখাংশ ও রে (Segment ও Ray)

রেখাংশ (segment)। খাতায় বা বোর্ডে সরলরেখার সম্পূর্ণ চিত্র অঙ্কন করা যায় না। ইহার একটি মাত্র অংশ অঙ্কন করা যায়। **দুই পার্শ্বে দুইটি বিন্দুদ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখার অংশটিকে রেখাংশ বলা হয়।** নিম্নের চিত্রে AB একটি রেখাংশ। AB



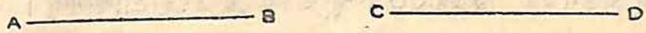
রেখাকে $\overline{AB}$ এইরূপে লেখা হয়। A ও B এর প্রত্যেকটিকে সরলরেখাটির প্রান্তবিন্দু বলা হয়। ইহার উপর C একটি বিন্দু হইলে, C বিন্দুটি AB কে AC ও CB এই দুই রেখাংশে বিভক্ত করিবে।

অভিমুখী রেখা (directed line)। A ও B বিন্দুর মধ্য দিয়া সরলরেখা উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত হইতে পারে। ইহাকে $\overleftrightarrow{AB}$ এইরূপে লেখা হয়। কিন্তু ইহা একইদিকে বর্ধিত হইলে ইহাকে লেখা হয় $\overrightarrow{AB}$ এবং এই রেখাকে বলা হয় **রে** (ray)। প্রান্তবিন্দুই রে এর শীর্ষবিন্দু (vertex)। তীরচিহ্ন রেখা **দিক ও পরিমাণ** উভয়ই নির্দেশ করিয়া থাকে।



দুইটি রেখাংশের তুলনা। মনে কর, AB ও CD রেখাংশের মধ্যে কোনটি বড় এবং কোনটি ছোট তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

CD কে AB এর উপর এমন ভাবে স্থাপন কর যাহাতে C বিন্দু A বিন্দুর



উপর পড়ে এবং CD, AB বরাবর পড়ে। এখন যদি D বিন্দু, A ও B এর মধ্যে থাকে তবে রেখাংশ CD, রেখাংশ AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। ইহাকে প্রকাশ করা যায় $\overline{CD} < \overline{AB}$.

আবার যদি D বিন্দু, B বিন্দুর ডান পাশে পড়ে, তাহা হইলে CD, AB হইতে বৃহত্তর। ইহাকে প্রকাশ করা হয় $\overline{CD} > \overline{AB}$. আবার যদি D বিন্দু, B বিন্দুর উপর পড়ে, তবে CD ও AB রেখাংশদ্বয়কে সর্বসম বলা হয়। ইহাকে প্রকাশ করা হয় $\overline{CD} = \overline{AB}$ বা $\overline{CD} \cong \overline{AB}$।

সুতরাং দুইটি রেখা যদি এইরূপ হয় যে, একটিকে অপরটির উপর স্থাপন করিলে, তাহাদের সব কয়টি বিন্দু পরস্পরের উপর সমাপতিত হয়, তবে রেখাংশদ্বয়কে **সর্বসম** (congruent) রেখাংশ বলা হয়।

রেখাংশের দৈর্ঘ্য, স্কেল ও কাঁটা-কম্পাসের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। তাহা তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ।

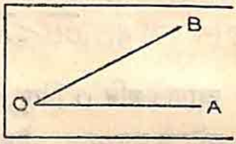
রে (ray)। একটি সরলরেখা যদি এক পার্শ্বে একটি বিন্দু দ্বারা সীমাবদ্ধ হইয়া অপর পার্শ্বে অনন্ত পর্য্যন্ত বিস্তৃত হয়, তবে উহাকে রে বলে, তাহা তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ। সুতরাং একপার্শ্বে একটি বিন্দু দ্বারা সীমাবদ্ধ সরলরেখার অংশ বিশেষকে 'রে' বলে। নিম্নের চিত্রে $\overrightarrow{OA}$ রে টি, O বিন্দু হইতে A বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত। আবার দ্বিতীয়



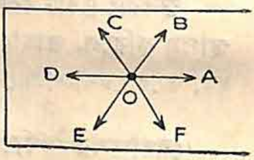
চিত্রে দেখ O বিন্দু AB সরলরেখাকে দুইটি বিপরীতমুখী বিভিন্ন রে OA এবং OB তে বিভক্ত করিয়াছে। AB রেখার O বিন্দুর বাম পার্শ্বের

সকল বিন্দু এবং O বিন্দু OA রে এর অন্তর্গত। অনুরূপে O বিন্দু OB রে এর অন্তর্গত। সুতরাং O বিন্দু উভয় রে এরই প্রান্তবিন্দু।

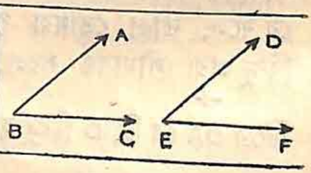
3. কোণ (angle)। একই প্রান্তবিন্দুবিশিষ্ট দুইটি বিভিন্ন রে একটি কোণের সৃষ্টি করে। এই প্রান্তবিন্দু কোণের শীর্ষ বিন্দু (vertex) এবং রে দ্বয়কে ইহার বাহু (arms) বলা হয়। পার্শ্বস্থ চিত্রে OA এবং OB রে দুইটি AOB কোণ সৃষ্টি করিয়াছে।



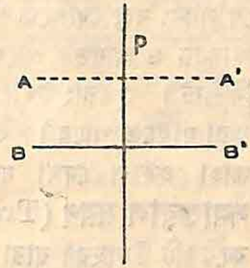
অনেক সময় কোণের দুইটি বাহুকে বিভিন্ন রে না ধরিয়া একই রে এর বিভিন্ন অবস্থানরূপে কল্পনা করা হয়। মনে কর OA রে টির প্রথম অবস্থান OA হইতে O বিন্দুকে স্থির রাখিয়া চিত্রের ন্যায় প্রদর্শিত পথে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া ক্রমে ক্রমে ∠AOB, ∠AOC, ∠AOD, ইত্যাদি কোণ উৎপন্ন করিল। রে টি যতই ঘুরিতে থাকিবে কোণের পরিমাণের ততই বৃদ্ধি হইবে। চিত্রে সর্বশেষ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে ∠AOF.



কোণের সমতা। মনে কর, ∠ABC ও ∠DEF দুইটি কোণের ∠DEFটি কে ∠ABCএর উপর এইরূপে স্থাপন করা হইল যেন E বিন্দু B বিন্দুর উপর এবং EF বাহুর BC বাহুর উপর পতিত হইল। এখন যদি ED, BAএর উপর পড়ে, তাহা হইলে ∠ABC ও ∠DEF পরস্পর সমান হইবে। ইহা হইতে বলা যায় যে, যদি দুইটি কোণ এইরূপ হয় যে একটির শীর্ষবিন্দু ও এক বাহু অপরটির শীর্ষবিন্দু ও এক বাহুর উপর স্থাপন করিলে ইহাদের অবশিষ্ট বাহুদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যায়, তবে কোণদ্বয়কে পরস্পর সমান বলা হয়।



4. সরলরেখার উপর প্রতিফলন। মনে কর, কোন সমতলের উপর p একটি সরলরেখা। ইহার উপর একটি দর্পণ ঐ সমতলের উপর লম্ব ভাবে রাখ। তাহা হইলে ঐ সমতলের প্রতিটি বিন্দুর জন্য দর্পণের সমতলের বিপরীত দিকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু পাওয়া যাইবে, যাহাদের মধ্যে একটি পারস্পরিক সম্বন্ধ আছে। প্রথম বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং দ্বিতীয় বিন্দুকে প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়, তাহা পূর্বে শিখিয়াছ। এই পারস্পরিক সম্বন্ধকে M_p দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, যেখানে p ইহার প্রতিফলন অক্ষরেখা। প্রতিফলনের মূল ধর্মগুলিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

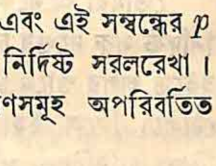


(i) প্রতিটি সরলরেখা p এর একটি নির্দিষ্ট প্রতিফলন M_p আছে। তাহা হইলে A এর প্রতিবিম্ব A′ হইলে, A′ এর প্রতিবিম্ব A হইবে। সুতরাং যদি M_p (A) = A′ হয় তাহা হইলে M_p(A′) = A হইবে, A ও A′ পরস্পর p এর বিপরীত দিকে থাকিবে।

(ii) p সরলরেখার সকল বিন্দুই নির্দিষ্ট এবং এই সম্বন্ধের p একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, সুতরাং AA′ এবং BB′ও নির্দিষ্ট সরলরেখা।

(iii) M_p প্রতিফলনের ফলে দূরত্ব ও কোণসমূহ অপরিবর্তিত থাকে।

(iv) মনে কর, $\overline{PA}$ ও $\overline{PB}$ রেদ্বয় ∠APB উৎপন্ন করিয়াছে। যদি ইহার মধ্যে এরূপ প্রতিফলন M_p পাওয়া যায় যে PB, PA এর প্রতিবিম্ব হইবে এবং PA, PB এর প্রতিবিম্ব হইবে তাহা হইলে উক্ত p রেখা ∠APBএর সমদ্বিখণ্ডক হইবে। তাহা হইলে ∠APp = ∠pPB. এখানে



A→B, ও PA→PB এবং

B→A, ও PB→PA.

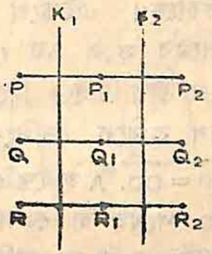
5. তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ যে বিন্দুর গতির সাহায্যে রেখার সৃষ্টি হয়। সেই রেখা সরল বা বক্র হইতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে যে সকল বস্তু দেখিতে পাওয়া যায় তাহাদের প্রত্যেকের একটি নির্দিষ্ট আকার ও আয়তন আছে। ইহাদের অধিকাংশই জ্যামিতিক আকার-বিশিষ্ট। সুতরাং ইহাদের প্রত্যেকের উপর বিন্দু, রেখা ইত্যাদি কল্পনা করা যাইতে পারে। এই সকল বস্তুর মধ্যে গতি যদি লক্ষ্য করা যায় তাহা হইলে দেখা যাইবে যে ঐ গতি দুই প্রকার, **চলন** বা **সমান্তরাল সরণ** (Translation) ও **ঘূর্ণন** (Rotation)। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা ইহা বোঝান হইল।

মনে কর, তোমার পড়ার টেবিলের উপর রক্ষিত বই, কলম ইত্যাদি তুমি সরাইয়া দিলে, অর্থাৎ টেবিলের উপরেই ঐগুলিকে স্থানান্তর করিলে। ইহাদের নিজস্ব কোন শক্তি নাই, তোমার শক্তির দ্বারা ইহাদিগকে স্থানান্তর করিলে, সুতরাং একটি আয়তাকার বস্তু (বই) টেবিলের সমতলের উপর চলিল। কিন্তু ইহাতে তোমার বইয়ের আকার বা আয়তনের কোন পরিবর্তন হইল না।

তোমরা অনেকে গ্রামোফোন দেখিয়াছ। ইহার রেকর্ড একটি নির্দিষ্ট সরু দণ্ডের চারিদিকে ঘুরিতে থাকে, কিন্তু ইহার বাক্সটি একস্থান হইতে অপর স্থানে চলিয়া যাইতেছে না। একটি ভারি বাক্সকে জোরে ঠেলিয়া দিলে ইহা স্থানান্তরিত হয়। ঘড়ির কাঁটা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে ঘুরিতে থাকে। এরূপ গতি ঘূর্ণনের ফলে হয়। আবার মনে কর কোন সমতলের উপর একটি ত্রিভুজাকার, বা আয়তাকার, বা বৃত্তাকার কোন ধাতব পাত ঠেলিয়া দিলে বা ঘসিলে, দেখিবে ইহার উপর একটি দাগের সৃষ্টি হইয়াছে। এই সকল বস্তুর চলনের ফলে ঐ দাগগুলির সৃষ্টি হয়।

এইরূপে দৈনন্দিন জীবনে আমরা যে সমস্ত বস্তু চলিতে বা চালিত হইতে দেখি তাহাদের গতি দুই প্রকার, যথা, (1) **চলন** এবং (2) **ঘূর্ণন**।

6. **চলন বা সমান্তরাল সরণ** (Translation)। দুইটি পরস্পর সমান্তরাল প্রতিফলক দ্বারা ক্রমিক প্রতিফলনকে চলন বা সমান্তরাল সরণ বলা হয়। ধরা যাক, কোন সমতলে P একটি বিন্দু। ইহার সামনে K_1 ও K_2 দুইটি পরস্পর সমান্তরাল প্রতিফলক। K_1 দ্বারা প্রতিফলনের ফলে P এর প্রতিবিম্ব P_1. এবং P_1 এর K_2 প্রতিফলক দ্বারা সৃষ্ট প্রতিবিম্ব P_2. এই ক্রমিক প্রতিফলন একটি পরিবর্তন। ইহাকেই চলন বলা হয়। চলনের ফলে P এর একটি এবং কেবলমাত্র একটিই প্রতিবিম্ব P_2 সৃষ্ট হয়। সমতলের অন্যান্য বিন্দু Q, R প্রভৃতির অনুরূপ চলনের ফলে যথাক্রমে Q_2 ও R_2 প্রভৃতি প্রতিবিম্ব সৃষ্ট হইবে। PP_2 কে যদি V বলা হয়, তবে PP_2 এর দৈর্ঘ্য, V এর পরিমাণ (magnitude) নির্দেশ করে এবং V এর দিক (direction) PP_2 এর দিকের সমান্তরাল হয়। যাহার দিক এবং পরিমাণ থাকে তাহাকে ভেক্টর (vector) বলা হয়। সুতরাং চলন একটি ভেক্টর। নিম্নে চলনের বিশদ আলোচনা করা হইল।



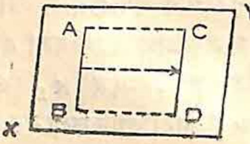
কোন সমতলের উপর দুইটি বিন্দু সংযুক্ত করিলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। কিন্তু সমতলের উপর কোন বিন্দু সরল বা বক্র আকারে চলিতে পারে। সরলরেখা সর্বদাই সরলভাবে চলিতে থাকে। যখন কোন বস্তু সরলরেখা অবলম্বন করিয়া চলে তাহাকেও **চলন** বলা হয়।

কোন বস্তুর চলনের সময় প্রত্যেক অবস্থানে ঐ সরলরেখা **সমান্তরাল** হইবে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

I. সরলরেখার চলন।

মনে কর, XY সমতলে AB একটি রেখাংশ। মনে কর AB রেখাকে

পার্শ্বস্থ চিত্রের ন্যায় তীরচিহ্নিত দিকে সরান হইল। তাহা হইলে বলা যায় যে AB সরলরেখাকে স্থানান্তরিত করা হইয়াছে। অর্থাৎ ইহাকে চলন বলা চলে। চলনের ফলে AB সরলরেখার দুইটি প্রান্তবিন্দু A ও B যথাক্রমে ('…'চিহ্নিত রেখায়) AC ও BD সরলরেখায় চলিয়াছে এবং তাহার শেষ অবস্থান CD সরলরেখা হইয়াছে। এইরূপে AB রেখার উপর যে কোন বিন্দু বা সকল বিন্দুই চলনের ফলে AB রেখার শেষ অবস্থান CD রেখার উপর থাকিবে এবং তীর চিহ্নিত দিকে চলিবে। এখন AB ও CD সরলরেখার দৈর্ঘ্য মাপ করিলে দেখিবে যে উহাদের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান অর্থাৎ $\overline{AB} = \overline{CD}$. A হইতে C বিন্দুতে যাইতে AC পথটি, B হইতে Dতে যাইতে BD পথের বা রেখার সহিত **সমান্তরাল**। অর্থাৎ AC ॥ BD এবং AB = ও ॥ CD থাকিবে।

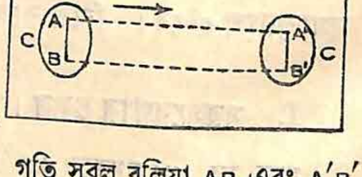


II. চলন গতি।

মনে কর, C একটি বস্তু, ইহার তলের উপর দুইটি বিভিন্ন বিন্দু A ও B যোগ করিয়া একটি সরলরেখা টানা গেল। বস্তুর গতি চলন হইলে ইহার চলনের প্রত্যেক অবস্থানেই ঐ AB টানা রেখা সমান্তরাল হইবে। এই চলন গতি আবার দুই প্রকার হইতে পারে **সরল** ও **বক্র**। সরলগতিতে বস্তুর প্রত্যেক বিন্দুই সরলরেখার পথে চলিবে। মনে কর, C বস্তুটি XY তলের উপর চলিল।

সরল গতি।

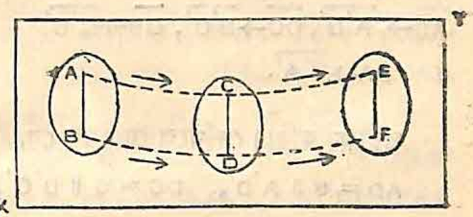
পার্শ্বস্থ চিত্রে C বস্তুটি তীর চিহ্নিত দিকে সরিয়া গেল। মনে কর A′ ও B′ যথাক্রমে A ও B বিন্দুর পরিবর্তিত অবস্থান। এখানে A, A′ দ্বারা এবং B, B′ দ্বারা বিন্দুদ্বয়ের পরিক্রমন পথ নির্দেশ করা হইয়াছে। গতি সরল বলিয়া AB এবং A′B′



পরস্পর সমান্তরাল হইবে, শুধু তাহাই নহে AA′ এবং BB′ও পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

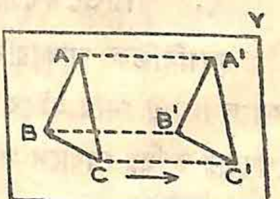
বক্র গতি।

XY তলের উপর বস্তুটির পরিক্রমণ পথের দিক তীরচিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। নিম্নের চিত্রটি দেখ। ইহার পর পর দুইটি অবস্থান দেখান হইয়াছে। C,E দ্বারা ও D,F দ্বারা বস্তুটির A ও B বিন্দু দুইটি ঐ দুইটি অবস্থানে কোথায় কোথায় আছে তাহা দেখান হইয়াছে। বস্তুর গতি চলন গতি হইলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা, যথা AB, CD ও EF, বস্তুটির পরিক্রমন পথে সর্ব অবস্থাতেই সমান্তরাল থাকিবে। কিন্তু এই চলনের গতি বক্র, কারণ প্রতিটি বিন্দু A,B ইত্যাদি যে পথ পরিক্রমন করিতেছে (AC, CE, BD, DF) তাহা সরল নহে বক্র।



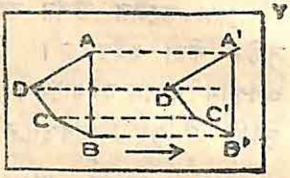
III. ত্রিভুজের ক্ষেত্রে চলন।

মনে কর, XY তলের উপর ABC একটি ত্রিভুজ। ইহাতে চলনের পথের দিক তীরচিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। চলনের ফলে $\triangle ABC$ এর A, B, C শীর্ষ-বিন্দুত্রয় যথাক্রমে AA′, BB′ ও CC′ সরলরেখায় চলিয়াছে। $\triangle A'B'C'$টি $\triangle ABC$ এর পরিবর্তিত অবস্থান। এখানে $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ এবং $CA \parallel C'A'$. আবার, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ ও $CA = C'A'$. তাহা হইলে, $\triangle ABC$ ও $\triangle A'B'C'$ এর আকার সমান।



IV. চতুর্ভুজের চলন।

ধর, একটি তলের উপর ABCD চতুর্ভুজকে তীরচিহ্নিত দিকে সরান হইল। মনে কর A′B′C′D′ চতুর্ভুজটি ABCD চতুর্ভুজের পরিবর্তিত অবস্থান। এখানে A→A′, B→B′, C→C′ এবং D→D′, আবার $\overline{AD}\to\overline{A'D'}$, $\overline{DC}\to\overline{D'C'}$, $\overline{CB}\to\overline{C'B'}$ এবং $\overline{BA}\to\overline{B'A'}$.



পরীক্ষা করিয়া দেখিলে দেখিবে যে,

AD = ও ∥ A′D′, DC = ও ∥ D′C′, CB = ও ∥ C′B′ এবং BA = ও ∥ B′A′.

সুতরাং চলনের ফলে ইহাদের আকার বা আকৃতির কোন পরিবর্তন দেখা যায় না।

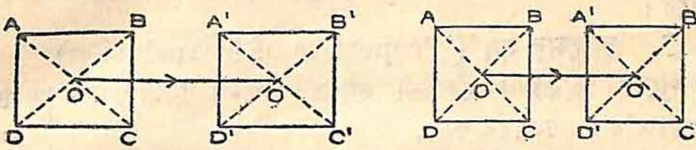
অনুরূপে, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ইত্যাদির চলন দেখান যাইতে পারে।

V. আয়তক্ষেত্রের সমান্তরাল সরণ।

জ্যামিতিক আকারবিশিষ্ট প্রত্যেক বস্তুর একটি নির্দিষ্ট কেন্দ্র আছে। ঐ কেন্দ্র হইবে উহাদের জ্যামিতিক কেন্দ্র। যেমন, আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় যেখানে পরস্পরকে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দু হইবে আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র। অনুরূপে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইবে উহার কেন্দ্র ইত্যাদি।

মনে কর, ABCD আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র O, উহার এই কেন্দ্রে

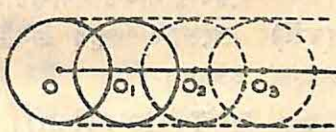
একটি সরু সূতা বাঁধিয়া তীরচিহ্নিত দিকে চালনা করা হইল (প্রথম চিত্র)।



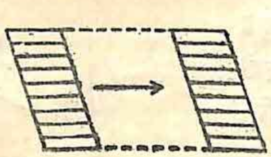
(1) (2)

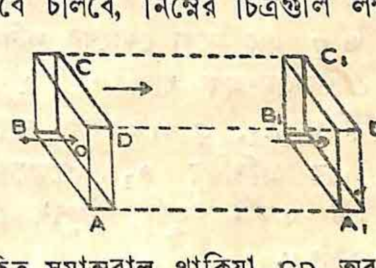
কিছুক্ষণ পরে ইহার অবস্থান হইল A'B'C'D'. ইহাও একটি আয়তক্ষেত্র যাহার মাপ পূর্বের আয়তক্ষেত্রের মাপের সহিত সমান। অনুরূপভাবে ABCD বর্গ ক্ষেত্রকে তীরচিহ্নিত দিকে চালনা করা হইল (দ্বিতীয় চিত্র)। ইহার কোন অবস্থান A'B'C'D' বর্গক্ষেত্রটি হইল। প্রতি ক্ষেত্রে লক্ষ্য কর ইহাদের চলন রেখা পরস্পরের সহিত সমান্তরাল।

আবার দেখ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে OPর দিকে সমান্তরাল সরণ দিলে পার্শ্বের চিত্রের ন্যায় বৃত্তটি চলিবে। কিন্তু O বিন্দুর চারি দিকে ঘুরিবেনা। চলনের সময় প্রতিটি জ্যামিতিক চিত্রের **কেন্দ্র একই রেখায় থাকিবে।**



পূর্বে সমতল বস্তুর সমান্তরাল সরণ সম্বন্ধে আলোচিত হইয়াছে। ঘনবস্তুর ক্ষেত্রেও এই নিয়ম প্রযোজ্য হইবে। ইহাতে প্রত্যেকটি অংশ ভূমির সহিত সমান্তরাল ভাবে চলিবে, নিম্নের চিত্রগুলি লক্ষ্য





কর। এখানে বস্তুটি নিজের সহিত সমান্তরাল থাকিয়া CD অবস্থান

হইতে C_1D_1 অবস্থানে গেল (তীরচিহ্নিত দিকে)। ইহার কেন্দ্রের মধ্য দিয়া বলপ্রয়োগ করিলে চলন হইবে, অন্যথায় ইহা ঘুরিয়া যাইবে।

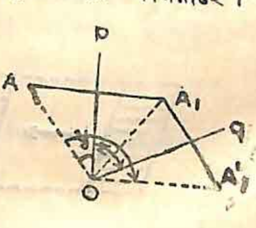
7. চলনের ধর্ম (Properties of Translation).

পূর্বের বিভিন্ন আলোচনা হইতে চলনের নিম্নলিখিত ধর্মগুলি পাওয়া যায়। চলনের ফলে,

(i) সকল বস্তুই সরলরেখা অবলম্বন করিয়া চলে।
(ii) বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে চলে।
(iii) বস্তুর উপর প্রতিটি বিন্দু, সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল পথে চলে।
(iv) বস্তুর আকার বা আকৃতির কোন পরিবর্তন হয় না।
(v) চলনের কোন অক্ষরেখা থাকে না।
(vi) বিভিন্ন অবস্থানে কেন্দ্র সমূহের সংযোজক সরলরেখা চলনের রেখার সহিত সমান্তরাল থাকে।
(vii) প্রত্যেক বস্তুর একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রতিবিম্ব হইবে।

8. ঘূর্ণন (Rotation)। দুইটি প্রতিফলনের অক্ষ পরস্পর কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে, উহার ক্ষেত্রে দুইটি প্রতিফলনের গুণফল একটি সম্বন্ধ স্থাপন করে, তাহাই ঘূর্ণন, অর্থাৎ দুইটি পরস্পরছেদী প্রতিফলন-অক্ষের উপর প্রতিফলন চিত্রই ঘূর্ণন।

ধরা যাক, কোন সমতলে A একটি বিন্দু, ইহার সামনে p, q দুইটি প্রতিফলন-অক্ষ এবং ইহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। p ও q এর মধ্যে কোণের পরিমাপ z, p প্রতিফলন-অক্ষ দ্বারা সৃষ্ট A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1, q প্রতিফলক দ্বারা সৃষ্ট A_1 এর প্রতিবিম্ব A_1'. এক্ষেত্রে পরিবর্তনটি একটি ঘূর্ণন, ঘূর্ণন কোণকে ধরা হইল y.



$\because$ Aএর প্রতিবিম্ব A_1

$\therefore$ $OA = OA_1$ এবং $\angle AOp = \angle pOA_1 = \frac{1}{2}\angle AOA_1$ (1)

অনুরূপে, A_1 এর প্রতিবিম্ব A_1'.

$\therefore$ $OA_1 = OA_1'$ এবং

$$\angle A_1Oq = \angle qOA_1' = \tfrac{1}{2}\angle A_1OA_1' \quad (2)$$

$\therefore$ $y = \angle AOA_1 + \angle A_1OA_1'$

$= 2\angle pOA_1 + 2\angle A_1Oq$. [(1) ও (2) হইতে]

$= 2\angle pOq$.

$= 2z$.

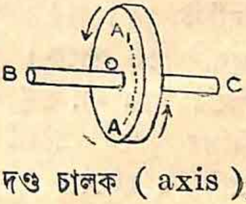
$\therefore$ $y = 2z$.

$\therefore$ ঘূর্ণনকোণ প্রতিফলন-অক্ষদ্বয়ের অন্তভূ'ত কোণের দ্বিগুণ।

নিম্নে ঘূর্ণনের বিশদ আলোচনা করা হইল।

ঘূর্ণনের প্রধান লক্ষণ এই যে, ঘূর্ণনক্রিয়াকালে ঘূর্ণ্যমান বস্তুটির প্রতিটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সাধারণ বিন্দু বা একটি নির্দিষ্ট সাধারণ সরলরেখার চারিদিকে নিজ নিজ দূরত্ব রক্ষা করিয়া আপন আপন কক্ষপথে বৃত্তাকার পথে চলিতে থাকে। উক্ত সর্তে যে বস্তু স্থানান্তরিত হয় তাহাই ঘূর্ণন। ঐ নির্দিষ্ট সাধারণ বিন্দুটিকে **কেন্দ্র** (centre) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে ঘূর্ণনের **অক্ষরেখা** (axis) বলা হয়।

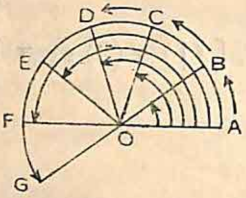
ঘূর্ণ্যমান বিন্দুটি ঘূর্ণনের সময় সমতলে যে দাগ সৃষ্টি করে তাহাই ঐ বিন্দুর **সঞ্চার পথ** (locus)। এই নিয়মে তোমরা খেলার মাঠে বৃত্তাকার পথ অঙ্কিত কর। বিভিন্ন গাড়ীর চাকা এই নিয়মে চলে। তোমরা অনেকে ভারী ফ্লাই-হুইল দেখিয়াছ ইহা গমভাঙ্গা মেসিন ইত্যাদিতে থাকে। পার্শ্বের চিত্রে ইহার ঘূর্ণন প্রক্রিয়াটিও লক্ষ্য কর। এখানে ইহা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে



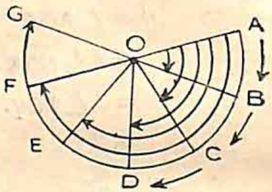
ঘুরিতেছে। ইহার কেন্দ্রস্থল O দিয়া একটি দণ্ড চালক (axis)

BOC সরলরেখা প্রবিষ্ট আছে। হুইলের তলে, চিত্র প্রদর্শিত A বিন্দুটি বৃত্তপথে ঘুরিয়া কোন নির্দিষ্ট সময়ান্তে A_1 বিন্দুতে গিয়াছে। এক্ষেত্রে বস্তুটি নিজে ঘুরিয়া বিন্দুটিকে ঘুরাইতেছে এবং OA এর প্রতিবিম্ব OA_1 হইবে।

9. ঘূর্ণন ক্রিয়া ও কোণের উৎপত্তি।



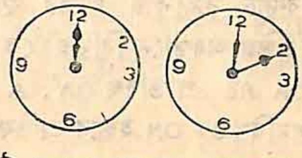
(1)

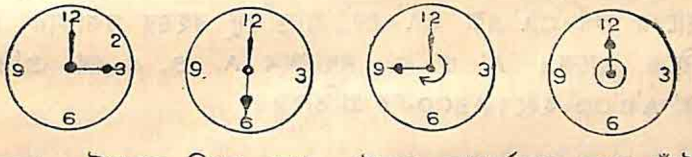


(2)

মনে কর OA একটি রেখাংশ, ইহা প্রথম অবস্থান OA হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ক্রমে প্রথম চিত্রে এবং ঘড়ির কাঁটার ক্রমে দ্বিতীয় চিত্রে ঘুরিয়া বিভিন্ন অবস্থানে ∠AOB, ∠AOC, ∠AOD, ∠AOE ইত্যাদি কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। প্রত্যেকটি কোণ ∠AOB অপেক্ষা বৃহত্তর। যে কোন অবস্থানে, প্রথম অবস্থানের সরলরেখার সহিত শেষ অবস্থানের সরলরেখা কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। A হইতে B পর্যন্ত ঘূর্ণনের পরিমাণকে OA ও OB দ্বারা উৎপন্ন কোণ বলা হয়। ঘূর্ণনের সঙ্গে সঙ্গে কোণের হ্রাস বৃদ্ধি হইয়া থাকে। সেই জন্য AOB, AOC ইত্যাদি কোণগুলি দ্বারা OA সরলরেখার ঘূর্ণনের পরিমাণ সূচিত হইয়া থাকে। সুতরাং, সরলরেখার ঘূর্ণনের উপর কোণের পরিমাণ নির্ভর করে, এবং ইহার ঘূর্ণন দ্বারা কোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট হয়। কিন্তু সরলরেখার দৈর্ঘ্যের হ্রাসবৃদ্ধিতে কোণের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে। অতএব, কোণের পরিমাণ বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না, শুধু বাহুদ্বয়ের পরস্পর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। বিভিন্ন ঘূর্ণনে প্রতিটি সরলরেখা বিভিন্ন অবস্থানে মূল সরলরেখার প্রতিবিম্ব হইবে।

তোমরা সকলে ঘড়ি দেখিয়াছ। ইহার ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা দুইটির একপ্রান্ত একটি গোল দাগ কাটা সমতল চাকতির উপর বামদিক হইতে ডান দিকে ঘুরিতে থাকে এবং ইহাদের অপর প্রান্ত চাকতির মধ্যস্থলে একটি বিন্দুতে আটকান। 12 টার সময় কাঁটা দুইটি জোড়া থাকে। তারপর আস্তে আস্তে ইহাদের মধ্যে ব্যবধান হইতে থাকে, অর্থাৎ কোণের সৃষ্টি হয়। কোণটি চাকতির মধ্যস্থলে কাঁটা দুইটির মধ্যে সৃষ্টি হয়। ইহাদের মধ্যে যত ব্যবধান বাড়িতে থাকিবে কোণের পরিমাণও তত বাড়িতে

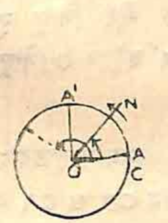




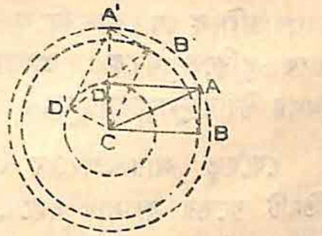
থাকিবে। উপরের চিত্রে দেখ এইরূপ আবর্তনের ফলে কাঁটা দুইটির সংযোগ স্থলে ক্রমাগত এক, দুই, তিন ও চার সমকোণের সৃষ্টি হইয়াছে।

10. কয়েকটি জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন (নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে)

পূর্বে দেখিয়াছ যে সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে কোণের সৃষ্টি হয়। এখন উহার সহিত চতুর্ভুজের ঘূর্ণনের চিত্রও নিম্নে দেওয়া হইল।



(1) সরলরেখার ঘূর্ণন

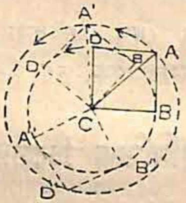


(2) আয়তক্ষেত্রের ঘূর্ণন

প্রথম চিত্রে OA একটি সরলরেখা, ইহাকে O বিন্দুর চারিদিকে

ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে বা বিপরীত দিকে ঘুরাইলে ইহার প্রান্ত-বিন্দুটি বৃত্তাকার পথের সৃষ্টি করে এবং নির্দিষ্ট বিন্দু Oতে ইহা বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন কোণের সৃষ্টি করিবে। A হইতে A′ ঘূর্ণনে OA এর প্রতিবিম্ব OA′, A এর প্রতিবিম্ব A′ যেখানে ∠AOA′ এর সমদ্বিখণ্ডক ON হইবে প্রতিফলন অক্ষ।

দ্বিতীয় চিত্রে ABCD আয়তক্ষেত্রকে C বিন্দুর চারিদিকে ঘুরাইলে A′ B′ C D′ অবস্থানে আসার কালে ইহার প্রত্যেকটি শীর্ষবিন্দু বৃত্তাকার পথে চলিয়াছে। A ও A′ একই বৃত্তাকার পথে ঘুরিবে, অনুরূপে B ও B′ এক বৃত্তে এবং D ও D′ অন্য এক বৃত্তাকার পথে ঘুরিবে। ইহাদের কর্ণ CA এবং CA′ এর প্রান্তবিন্দু বৃহত্তর বৃত্তাকার পথে ঘুরিতে থাকে। A′ B′ D′ যথাক্রমে A, B, D এর প্রতিবিম্ব এবং A′B′CD′ হইবে ABCDএর প্রতিবিম্ব।

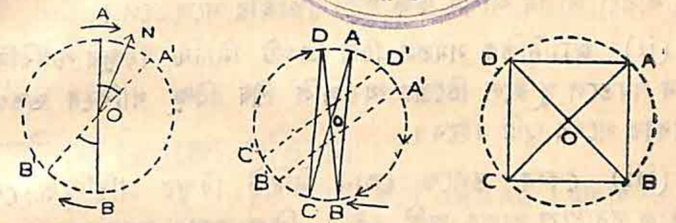


(3) বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণন

তৃতীয় চিত্রে লক্ষ্য কর যে, বর্গক্ষেত্রের যে কোন শীর্ষকে স্থির রাখিয়া অপরগুলিকে যে কোন দিকে ঘুরাইলে প্রত্যেক শীর্ষ বিন্দু বৃত্তাকার পথে ঘুরিতে থাকে। প্রত্যেক বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে C বিন্দু হইতে অপর শীর্ষবিন্দুসমূহের দূরত্ব।

যেহেতু আয়তক্ষেত্রের CB, CA ও CD অসমান সুতরাং ইহারা তিনটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে, আবার, বর্গক্ষেত্রের CB ও CA অসমান, সুতরাং ইহারা দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে এবং প্রত্যেক অবস্থান উক্ত ঘূর্ণনে মূল চিত্রের প্রতিবিম্ব হইবে।

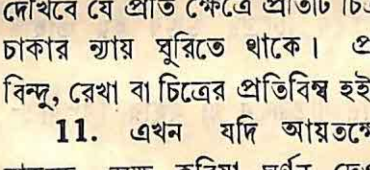
আবার লক্ষ্য কর যে, সরলরেখার মধ্যবিন্দুকে স্থির রাখিয়া ইহার প্রান্তদ্বয় যে কোন দিকে ঘুরাইলে এক্ষেত্রেও ঐ প্রান্তবিন্দুদ্বয় বৃত্তাকার পথে চলিবে।



সরলরেখা আয়তক্ষেত্র বর্গক্ষেত্র

AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু O, ইহা ঘূর্ণনে A' B' স্থানে আসিলে $\angle AOA' = \angle BOB'$ হইবে। ABCD আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র O (কর্ণ-দ্বয়ের ছেদ বিন্দু)। ইহার চারিদিকে আয়তক্ষেত্রের ঘূর্ণন লক্ষ্য কর। অনুরূপে বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্রের চারিদিকে উহার ঘূর্ণন লক্ষ্য করিলে দেখিবে যে প্রতি ক্ষেত্রে প্রতিটি চিত্র ইহার কেন্দ্রের চারিদিকে গাড়ির চাকার ন্যায় ঘুরিতে থাকে। প্রত্যেক (′) চিহ্নিত অক্ষরগুলি মূল বিন্দু, রেখা বা চিত্রের প্রতিবিম্ব হইবে।

11. এখন যদি আয়তক্ষেত্র, সমকোণী ত্রিভুজ প্রভৃতির বাহুকে অক্ষ করিয়া ঘূর্ণন দেওয়া যায় তাহা হইলে প্রতিক্ষেত্রে ঘনবস্তু সৃষ্টি হইবে। পার্শ্বের চিত্র লক্ষ্য কর। ABCD আয়তক্ষেত্রকে CD অক্ষ করিয়া ঘুরাইলে একটি চোঙ উৎপন্ন হয়। সমকোণী ত্রিভুজ ABC কে ($\angle C = 90^\circ$) ACর চারিদিকে ঘুরাইলে শঙ্কু উৎপন্ন হয়। অনুরূপে বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্রকে তাহার যে কোন বাহুকে অক্ষ করিয়া ঘুরাইলে এক একটি ভিন্ন আকারের ঘনবস্তু পাইবে।



12. ঘূর্ণনের ধর্ম (Properties of Rotation)

(i) ঘূর্ণন প্রক্রিয়া কালে কোন বস্তুর প্রতিটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সাধারণ বিন্দুর বা সাধারণ সরল রেখার চারিদিকে নিজ নিজ দূরত্ব রক্ষা করিয়া আপন আপন কক্ষ পথে বৃত্তাকার পথে চলে।

(ii) জ্যামিতিক সমতল চিত্র একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে কোন সমতলে ঘুরিলে চিত্রের যতগুলি শীর্ষ বিন্দু থাকিবে ততগুলি বৃত্তাকার পথের সৃষ্টি হইবে।

(iii) কোন তলকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে কোন সমতলে ঘুরাইলে তলের সৃষ্টি হইবে, কিন্তু কোন সমতলকে রেখার চারিদিকে ঘুরাইলে ঘন বস্তু উৎপন্ন হইবে।

(iv) সরল রেখার ঘূর্ণনে কেবল মাত্র কোণের সৃষ্টি হয়।

(v) ঘূর্ণনে চিত্রের বা বস্তুর স্থানের পরিবর্তন হয় কিন্তু ইহাদের আকার বা আকৃতির পরিবর্তন হয় না।

(vi) প্রত্যেক ঘূর্ণনে যে কোণ সৃষ্টি হয় তাহার সমদ্বিখণ্ডককে প্রতিফলন অক্ষ ধরিলে ঘূর্ণনের ফলে যে চিত্রের উদ্ভব হয় তাহাই প্রথম চিত্রের প্রতিবিম্ব হইবে।

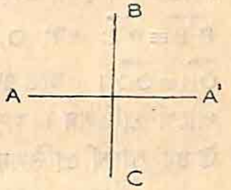
(vii) ঘূর্ণনের দিক ঘড়ির কাঁটার গতিক্রমে বা ইহার বিপরীত-ক্রমে হইতে পারে।

দ্বিতীয় পাঠ

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, সামান্তরিক, বৃত্ত ইত্যাদির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (Rotational Symmetry)।

13. প্রতিসাম্য। কোন চিত্রকে কোন সরল রেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে যদি অংশদ্বয়ের প্রত্যেক অঙ্গই পরস্পর মিলিয়া যায় তাহা হইলে চিত্রটিকে ঐ সরল রেখার উভয় পার্শ্বে **প্রতিসম** (symmetrical) বলা হয় এবং ঐ সরল রেখাকে চিত্রের **প্রতিসাম্য-অক্ষ** (axis of symmetry) বলে।

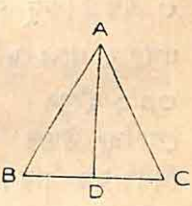
মনে কর BC সরল রেখার উভয় পার্শ্বে সমান দূরত্বে A ও A′ দুইটি বিন্দু আছে। উহাদের সংযোজক সরল রেখা AA′ ⊥ BC, A ও A′কে প্রতিসাম্য অক্ষ সাপেক্ষে বিপরীত বিন্দু বলা হয় এবং একটি অপরটির **প্রতিবিম্ব** হইবে। চিত্রে A′, A এর প্রতিবিম্ব।



14. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য।

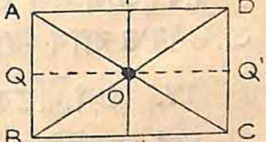
আবার মনে কর △ABC সমদ্বিবাহু, ($\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) যাহার শীর্ষ A, ভূমি BC এবং ভূমির মধ্য বিন্দু D. ($\overline{DB} = \overline{DC}$).

এখন △ABCকে AD রেখাক্রমে বরাবর ভাঁজ করিলে দেখিবে △ABD, △ADCএর উপর সমাপতিত হইবে। ∴ $\overline{BD} = \overline{DC}$, ∴ B,C এর সহিত মিলিয়া যাইবে। তাহা হইলে AB, AC এর উপর সমাপতিত হইবে। আবার ∠ADB = ∠ADC। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। তাহা হইলে বলা যায় যে,



একটি ত্রিভুজ অপর ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব। সুতরাং কোন **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উহার শীর্ষবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরল রেখার (মধ্যমার) উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।**

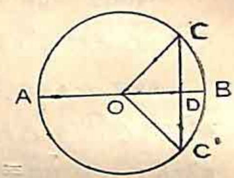
15. আয়তক্ষেত্রের প্রতিসাম্য। মনে কর, ABCD আয়তক্ষেত্রের O, AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু ; P ও P′ যথাক্রমে AD ও BC বাহুর মধবিন্দু। সুতরাং $\overline{PA} \equiv \overline{PD}$ এবং $\overline{P'B} \equiv \overline{P'C}$. PP′ যুক্ত করিলে ABCD আয়তটি APP′B ও PDCP′ দুইটি আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে। এখন ABCD আয়তক্ষেত্রকে P P′ রেখা ক্রমে ভাঁজ করিলে দেখা যাইবে যে APP′B অংশটি



PDCP′ অংশের উপর সমাপতিত হইবে। কারণ, ∵ $\overline{PA} \equiv \overline{PD}$, $\overline{P'B} \equiv \overline{P'C}$ এবং O, PP′ রেখার উপর অবস্থিত, ∴ $\overline{OA} \equiv \overline{OD}$ এবং $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$। অতএব □ABCDটি প্রতিসাম্যাক্ষ POP′ এর উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। অনুরূপে দেখান যায় যে □ABCD, QOQ′ অক্ষরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে,

কোন আয়তক্ষেত্র উহার যে কোন দুই বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

16. বৃত্তের ক্ষেত্রে প্রতিসাম্য। মনে কর, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস, ইহার পরিধির উপর C একটি বিন্দু এবং CD⊥ AB. এখন ABতে দর্পণ রাখিলে দেখিবে △OCD এর প্রতিবিম্ব OC′D হইবে। অর্থাৎ △OCC′, OB বা AB রেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। অন্যরূপেও ইহার প্রতিসাম্য নির্ণয় করা যায়।



AB এর উভয় পার্শ্বে OC ও OC′ দুইটি ব্যাসার্ধ অঙ্কন কর যেন ∠COB ≡ ∠C′OB হয়। বৃত্তটিকে AOB ক্রমে ভাঁজ করিলে দেখিবে OC, OC′ এর উপর পতিত হইবে (কারণ ∠COB ≡ ∠C′OB এবং OC = OC′)। ACB বৃত্তচাপের প্রতিটি বিন্দুই AC′B চাপের অনুরূপ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। সুতরাং বৃত্তটি AB ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। তাহা হইলে সাধারণভাবে বলা যায় যে,

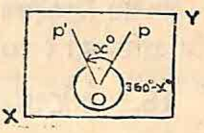
যে কোন বৃত্ত উহার যে কোন ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম ও ব্যাস ইহার প্রতিসাম্যাক্ষ।

17. জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসাম্যের ধারণা।

পূর্বে জ্যামিতিক চিত্রের সমান্তরাল সরণ, প্রতিস্থাপন, কাগজ ভাঁজ ইত্যাদির দ্বারা প্রতিসাম্যের সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে।

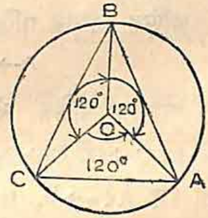
ঘূর্ণন দ্বারা উহার কি পরিবর্তন হয় তাহাই এখানে আলোচনা করা হইল।

মনে কর OP রেখাংশকে XY সমতলে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে x° ঘূর্ণন করা হইল। তাহা হইলে x° ঘূর্ণনে OP রেখাটি OP′ হইবে, অর্থাৎ x° ঘূর্ণনে, OP′, OP রেখার প্রতিবিম্ব হইবে, কেন্দ্র O নির্দিষ্ট থাকিবে।



সমবাহু ত্রিভুজ। মনে কর, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের OA, OB ও OC ব্যাসার্ধ তিনটি O বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এখন AB, BC ও CA যুক্ত করিলে ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ পাইবে। OA, OB ও OC, $\triangle ABC$ এর যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক। তাহা হইলে O ইহার কেন্দ্র হইবে। এখন O কেন্দ্রের চারিদিকে ত্রিভুজটিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে বা বিপরীত দিকে 120° ঘুরাইলে ত্রিভুজটি আপন অবস্থানের সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে। নিম্নের চিত্রে পরপর বিন্দুর চারিদিকে 120° ঘূর্ণনের চিত্র দেওয়া হইল।





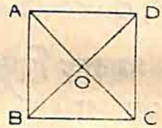
(1) (2) (3) (4)

ঘূর্ণনের প্রতি স্থানে ইহাদের একই রকম দেখিতে পাইবে এবং ইহারা প্রত্যেকে একই। যদি A, B, C চিহ্নগুলি না থাকিত

তাহা হইলে ইহাদের অবস্থান যে ঘূর্ণনের ফলে বিভিন্ন তাহা বলা যাইত না। ইহা হইতে বলা যায় যে,

সমবাহু ত্রিভুজের কেন্দ্র O এর চারিদিকে 120° ঘূর্ণনে ইহার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (rotational symmetry) হয়।

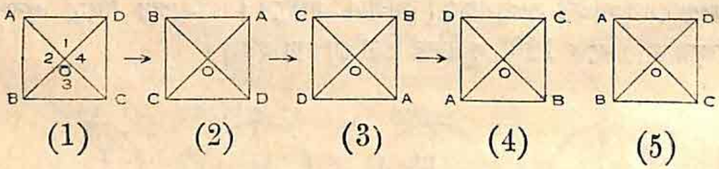
18. বর্গক্ষেত্র। ABCD বর্গক্ষেত্রের O, AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে ইহা B, C, D, বিন্দু দিয়া যাইবে। সুতরাং O ইহার কেন্দ্র। কেন্দ্রের চারিদিকে 90° ঘূর্ণনে বর্গক্ষেত্রেরও ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (rotational symmetry) থাকে।



ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে ঘুরাইলে বিন্দুগুলি নিম্নরূপে ঘুরিবে,

$A \to D$, $D \to C$, $C \to B$, ও $B \to A$.

আবার ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত ক্রমে ঘূর্ণনে বিন্দুগুলি $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, ও $D \to A$ ক্রমে ঘুরিবে। ইহাদিগকে একত্রে বলা যায় $A \longleftrightarrow B$, $B \longleftrightarrow C$, $C \longleftrightarrow D$, $D \longleftrightarrow A$, নিম্নে বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্রের চারিদিকে 90° ঘূর্ণনের চিত্র প্রদত্ত হইল।



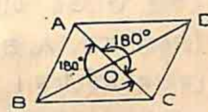
উক্ত চিত্রের প্রতিটি ঘূর্ণনের মান 90°, বৃত্তের ক্ষেত্রে বা সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে যেরূপ ঘূর্ণন দেখান হইয়াছিল, এখানেও সেরূপ দেখান হইয়াছে। প্রতিটি ঘূর্ণনে বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি প্রতিটি বাহুর উপর সমাপতিত হইবে, $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$, সুতরাং এই ঘূর্ণন হইতে বলা যায় যে বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান।

চিত্রে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত কোণগুলি প্রত্যেকে সমান, ইহাদের প্রত্যেকের মান একটি ঘূর্ণন মানের সঙ্গে সমান অর্থাৎ 90°.

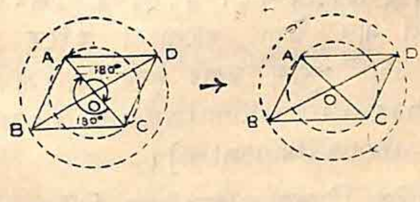
উপরের চিত্র হইতে বলা যায় যে,

বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্রকে 90° ঘূর্ণন দিলে বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (rotational symmetry) পাওয়া যায়।

19. সামান্তরিক। আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের ন্যায় সামান্তরিকের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পাওয়া যাইবে। এক্ষেত্রে ঘূর্ণনের মান ভিন্ন হইবে। সামান্তরিকের ক্ষেত্রে কেন্দ্রে 180° ঘূর্ণন দিতে হইবে। ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O. সামান্তরিকের কেন্দ্রে 180° ঘূর্ণন দিলে সামন্তরিকের প্রতিসাম্য চিত্র

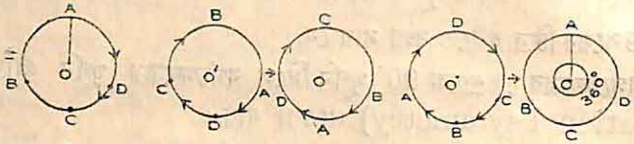


পাইবে। এক্ষেত্রে ▱ এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু সকল দুইটি ভিন্ন বৃত্তাকার পথে ঘুরিবে। ▱ এর যে কর্ণ ক্ষুদ্রতর তাহার অর্ধেক হইবে



ক্ষুদ্র বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং বৃহত্তর কর্ণের অর্ধ হইবে বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ। 360° ঘূর্ণনে ▱ABCD, প্রদর্শিত চিত্রানুযায়ী উহার পূর্বের অবস্থানের সহিত সম্পূর্ণ মিলিয়া যাইবে। উক্ত চিত্রের ঘূর্ণনে $\overline{OD} \equiv \overline{OB}$, $\overline{OA} \equiv \overline{OC}$, সুতরাং বলা যায় যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং সামান্তরিকেরও ঘূর্ণন প্রতিসাম্য থাকিবে যদি ইহার কেন্দ্রে 180° বা 360° ঘূর্ণন দেওয়া যায়।

20. বৃত্ত।



1 2 3 4 5

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিতে A, B, C, D চারিটি বিন্দু লও। OA OB,…ইত্যাদি ইহার ব্যাসার্ধ হইবে। এখন বৃত্তটিকে যদি কেন্দ্র O এর চারিদিকে ঘূর্ণন দেওয়া যায় তাহা হইলে 2, 3, 4 চিত্রগুলিতে A, B, C, D বিন্দুগুলির অবস্থান কিরূপ হইবে তাহা দেখান হইয়াছে। এখানে ঘূর্ণনটি ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে দেখান হইয়াছে। এখানে বিন্দুগুলির ঘূর্ণন, A→D, D→C, C→B, B→A অনুসারে হইয়াছে। অর্থাৎ OA সরলরেখা বিভিন্ন অবস্থানের পর আপন অবস্থায় আসিতে কেন্দ্রে 360° কোণ উৎপন্ন করিল। সুতরাং ABCD বৃত্তটির কেন্দ্রে 360° ঘূর্ণন দিলে উহা আপন অবস্থানে ফিরিয়া আসিল, ইহাতে কোন ক্ষেত্রেই বৃত্তের আকার বা আকৃতির কোন পরিবর্তন হইল না। উক্ত আলোচনা হইতে বলা যায় যে, বৃত্তের কেন্দ্রে 360° ঘূর্ণনে ইহার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পাওয়া যায় [A circle has a rotational symmetry under a rotation of 360° about its centre]।

সুতরাং বিভিন্ন চিত্রের ঘূর্ণনের মান বিভিন্ন দেখা যাইতেছে। কিন্তু প্রতিক্ষেত্রেই ঘূর্ণনে কোন জ্যামিতিক চিত্রের আকার বা আকৃতির কোন পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় না। সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র, সামান্তরিক, বৃত্ত ইত্যাদি জ্যামিতিক চিত্র বৃত্তাকার পথে আপন আপন অবস্থানে ফিরিয়া আসে। প্রতিক্ষেত্রে ঘূর্ণনের মান পৃথক। ইহাদের ঘূর্ণনের মান কেন্দ্রের চারিদিকে ঘূর্ণনকালে (ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে বা বিপরীত দিকে) যথাক্রমে 120°, 90°, 180°, 360° ইত্যাদি।

তৃতীয় পাঠ

জ্যামিতিক পরিবর্তনের সমন্বয় ও সর্বসমতা

(Composition of Transformation and Congruence)

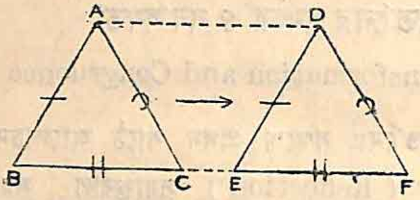
21. জ্যামিতিক পরিবর্তনের সম্বন্ধে প্রথম পাঠে আলোচনা করা হইয়াছে। প্রতিফলন (Reflection) সমান্তরাল সরণ (Translation) ঘূর্ণন (Rotation) ইত্যাদি জ্যামিতিক চিত্রের পরিবর্তনের প্রণালী। প্রতিক্ষেত্রে যদিও পরিবর্তন কথাটি বলা হইয়াছে আসলে ঐ পরিবর্তন শুধু অবস্থানগত পরিবর্তন। বস্তুর আকার বা আকৃতির কোন পরিবর্তন হয় না।

উপরিউক্ত প্রণালীর অন্তর্গত যে কোন দুইটি প্রণালী কোন চিত্রে প্রয়োগ করা হইলে সে ক্ষেত্রে যে পরিবর্তন হইবে তাহাই হইবে ইহাদের উভয় প্রণালীর **সমন্বয়** (Composition)। দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুর গতির মধ্যে ইহাদের সমবায় দেখা যায়। যে কোন গতিকে চলন ও ঘূর্ণন গতির সমবায়ে গঠিত বলিয়া ধরা যায়। যেমন কোন ঢালু স্থানে বল গড়াইয়া পড়িতেছে, রাস্তা দিয়া গাড়ির চাকা গড়াইয়া যাইতেছে, আকাশে মেঘ, সূর্য ও চন্দ্র ঢাকিয়া দিতেছে, আপন অক্ষের চারিদিকে ঘূর্ণ্যমান পৃথিবী সূর্য পরিক্রমন করিতেছে, ইত্যাদি বিভিন্ন প্রণালীর সমবায়ে ঘটিতেছে।

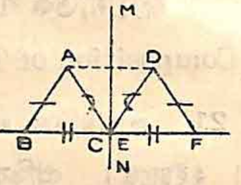
22. জ্যামিতিক একটি চিত্র অপর একটি চিত্রের সহিত সর্বতোভাবে সমান কিনা তাহা উক্ত পরিবর্তন প্রণালীর দ্বারা দেখান যায়। ইহা

নিম্নে একে একে আলোচনা করা হইল। প্রথমে সমান্তরাল সরণ দ্বারা ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রমাণ করা হইল।

ত্রিভুজের সর্বসমতা (1)।

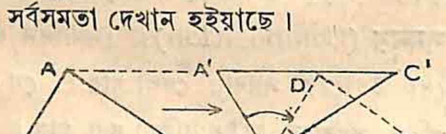


প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজ একই সমতলে অবস্থিত। মনে কর ইহাদের ভূমি একরেখীয়। AB ও AC যথাক্রমে DE ও DF এর সহিত সমান্তরাল। এখন $\triangle ABC$ তীরচিহ্নিত দিকে সমান্তরাল সরণ দ্বারা স্থাপন কর। যদি $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$ ও $C \rightarrow F$ হয়, তাহা হইলে $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ হইবে। যদি বিন্দুগুলি সমাপতিত না হয় তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে না। দ্বিতীয় চিত্রে প্রতিফলন দ্বারা ত্রিভুজের সর্বসমতা দেখান হইয়াছে।



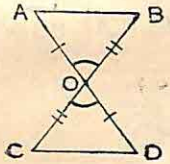
$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম দেখাইতে হইবে। $\triangle ABC$কে সমান্তরাল সরণ দ্বারা $A'EC'$ নতুন অবস্থানে আনয়ন করা হইল। যাহাতে B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়ে। এখন $\triangle A'EC'$ কে চিত্রের ন্যায় ঘূর্ণন দিলে ইহা DEF বিন্দুর স্থানে আসিবে। যদি $A' \rightarrow D$, $A'E \rightarrow DE$, $C' \rightarrow F$, $EC' \rightarrow EF$ এবং $A'C' \rightarrow DF$ হয় তাহা হইলে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হইবে। সুতরাং ত্রিভুজের সর্বসমতা, সমান্তরাল সরণ ও ঘূর্ণন উভয় প্রক্রিয়ার সমবায়ে দেখান হইয়াছে।

উক্ত চিত্রে $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ এবং $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ও $\angle C \cong \angle F$. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$.

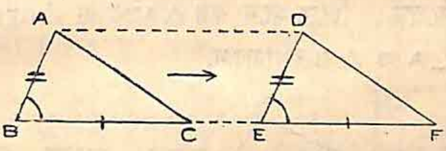
সুতরাং বলা যায় যে,

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। (S S S উপপাদ্য)।

ত্রিভুজের সর্বসমতা (2)।



প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র

$\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ দুইটি ত্রিভুজ প্রথম চিত্রে দেখ। এখন $\angle AOB = \angle COD$, কারণ, $\overline{AB}$ এর A হইতে Bতে ঘূর্ণন, AD রেখার D হইতে C পর্যন্ত সমান ঘূর্ণন দ্বারা $\angle AOB$, $\angle DOC$ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। এই কোণদ্বয়কে বিপ্রতীপ কোণ বলে। এখন $\triangle OAB$কে ঘূর্ণন দাও (O বিন্দুর চারিদিকে) যেন OA, OD এর উপর পড়ে তাহা হইলে A, D এর উপর সমাপতিত হইবে। $\because \angle AOB = \angle DOC$ সুতরাং $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ এর উপর পড়িবে। $\because OB = OC$ $\therefore$ B বিন্দু নিশ্চয়ই C বিন্দুর উপর পড়িবে। সুতরাং $\triangle OAB \cong \triangle OCD$. এখানে OA, OD অনুরূপ বাহু, OB, OC অনুরূপ বাহু, AB, CDও অনুরূপ বাহু এবং $\angle AOB$কে অন্তর্ভুক্ত কোণ বলা হয়।

দ্বিতীয় চিত্রে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর মধ্যে $AB = DE$, $BC = EF$ এবং অন্তর্ভূত $\angle ABC =$ অন্তর্ভূত $\angle DEF$ এখন $\triangle ABC$কে তীরচিহ্নিত

দিকে সমান্তরাল সরণ এরূপ ভাবে দাও যেন C, F এর উপর পতিত হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে। সুতরাং $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

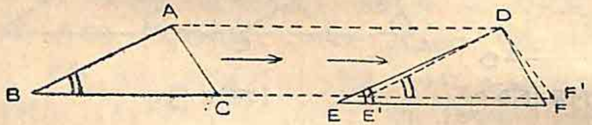
সুতরাং সাধারণ ভাবে বলা যায় যে,

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হয় SAS = SAS

ত্রিভুজের সর্বসমতা (3)।

নিম্নের চিত্রে মনে কর $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর মধ্যে $\overline{BC} = \overline{EF}$ এবং $\angle A$ ও $\angle B$ যথাক্রমে,



$\angle D$ ও $\angle E$ এর সহিত সমান। $\triangle$ ABCকে তীরচিহ্ন দিকে সমান্তরাল সরণ দ্বারা এমনভাবে আনয়ন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়ে। মনে কর $DE'F'$ ইহার নূতন অবস্থান হইল। যেহেতু $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, সুতরাং $DE'F'$ ত্রিভুজটিকে D বিন্দুতে এরূপ ঘূর্ণন দাও যেন $\angle E'DF'$, $\angle EDF$ এর উপর পতিত হয়, তাহা হইলে $\angle E \cong \angle E'$ হইবে, F'ও F বিন্দুর উপর পড়িবে। $\because$ BC = EF সুতরাং $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

সুতরাং সাধারণভাবে বলা চলে যে,

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যদি অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সহিত সমান হয় ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

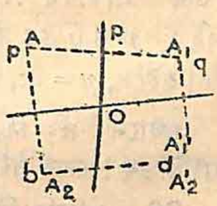
ইহাকে সংক্ষেপে বলা হয় $a.\ a.\ s = a.\ a.\ s$ উপপাদ্য।

23. ত্রিভুজ ছাড়াও বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র, বৃত্তের ক্ষেত্রে সর্বসমতা পূর্বের বিভিন্ন চিত্র হইতে সহজে বুঝিতে পারিবে। বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান, আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান ইত্যাদি আলোচিত হইয়াছে।

24. প্রতিফলনের সমন্বয় (Composition of Reflection).

অনুচ্ছেদ 21. 22. ও 23.এ চলন ও ঘূর্ণনের সমন্বয় আলোচিত হইয়াছে। এখন প্রতিফলনের সমন্বয় নিম্নে আলোচিত হইল।

(*a*) মনে কর p ও q দুইটি প্রতিফলন অক্ষরেখা। তাহা হইলে p প্রতিফলন অক্ষ সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1, এবং q প্রতিফলন অক্ষের সাপেক্ষে A_1 এর প্রতিবিম্ব A_1'. সুতরাং,



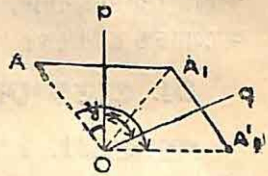
$M_p(A) = A_1$ এবং $M_q(A_1) = A_1'$. সুতরাং এই প্রতিফলনদ্বয়ের সমন্বয়ে A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A_1' হইল। ইহাকে প্রকাশ করা যায় $M_q M_p(A) = A_1'$. সুতরাং M_p ও M_q যথাক্রমে p ও q সরলরেখার উপর দুইটি প্রতিফলন। A বিন্দু ও উহার সর্বশেষ প্রতিবিম্বের সম্বন্ধই $M_q M_p(A) = A_1'$.

$M_q M_p$ একটি নূতন পরিবর্তন। এই পরিবর্তনটি প্রতিফলনের সমন্বয় দ্বারা সম্ভব হইল। এক্ষেত্রে প্রতিফলনের গুণফল বিনিয়ম নিয়ম সিদ্ধ নহে।

টীকা 1. উক্ত চিত্রে যদি p ও q পরস্পর সমান্তরাল হয় তাহা হইলে $M_q M_p$কে সমান্তরাল সরণ বলা হয়।

টীকা 2. যদি M_pকে দুইবার প্রয়োগ করা হয়, তাহা হইলে $M_p M_p = M_p^2$, যাহা সমস্ত বিন্দুকে নিজ নিজ অবস্থানে আনয়ন করিবে।

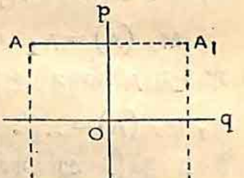
25. দুইটি প্রতিফলনের অক্ষ পরস্পর কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে উহার ক্ষেত্রে দুইটি প্রতিফলনের গুণফল একটি সম্বন্ধ স্থাপন করে, তাহাই ঘূর্ণন, অর্থাৎ, দুইটি পরস্পরছেদী প্রতিফলন অক্ষের উপর প্রতিফলন চিত্রই ঘূর্ণন।



M_p, M_q দুইটি প্রতিফলন, ইহাদের অক্ষ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A এর প্রতিবিম্ব A_1, A_1 এর প্রতিবিম্ব A_1', এক্ষেত্রে সম্বন্ধটি ঘূর্ণন। p ও q এর মধ্যে কোণের মান মনে কর z, ঘূর্ণন কোণ $= y$, তাহা হইলে, $y = 2z$, ইহা সর্বদা মনে রাখিবে।

এখানে $R = M_q M_p$, ইহাও একটি পরিবর্তন, ইহা পূর্বে জ্যামিতিক চিত্রের সর্ব-সমতায় প্রয়োগ করা হইয়াছে।

26. পার্শ্বের চিত্রে ধরা যাক p ও q পরস্পর সমকোণে নত। এক্ষেত্রে প্রতিফলনের গুণফল বিনিয়ম নিয়ম সিদ্ধ। $M_q M_p$ একটি ঘূর্ণনও বটে এবং ঘূর্ণনটি p ও q এর ছেদবিন্দু Oকে কেন্দ্র করে। O বিন্দু AA_1 এর মধ্যবিন্দু বরাবর অবস্থিত।



অনুশীলনী

1. প্রতিফলন কাহাকে বলে? কোন বস্তু P এর প্রতিবিম্ব P′ বলিতে কি বোঝ, চিত্র দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

2. বিন্দুর প্রতিবিম্ব বিন্দু ও সরলরেখার প্রতিবিম্ব ও সরলরেখা, চিত্র অঙ্কণ করিয়া দেখাও।

3. কোণের প্রতিবিম্ব কি হইবে? ইহার দিক বা কি হইবে চিত্র দ্বারা বুঝাও।

4. $M_p(A) = A'$ বলিতে কি বোঝায় ? চিত্র অঙ্কন করিয়া বুঝাও।

5. $M_p(A') = A$ হইলে, A ও A′ এর মধ্যে কি সম্পর্ক হইবে ?

6. প্রতিফলন অক্ষদ্বারা একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক কিরূপে পাইবে ?

7. সমান্তরাল সরণ কাহাকে বলে ? উদাহরণ দাও। ইহা কয় প্রকার ?

8. একটি সরলরেখা ABকে তোমার ডান দিকে 3 সেমি. সরাইলে ইহার চিত্র কিরূপ হইবে ?

9. যে কোন Δ ABCকে 3 সেমি. কোন তলের সহিত সমান্তরাল সরণ করিলে কিরূপ চিত্র পাইবে ? তাহার গতিপথ সহ চিত্র অঙ্কন কর।

10. 9নং প্রশ্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করিয়া চিত্র অঙ্কন কর।

11. আয়তক্ষেত্র ও বৃত্তের সমান্তরাল সরণ চিত্রসহ বর্ণনা কর।

12. সমান্তরাল সরণের ধর্ম কি কি, তাহা লেখ।

13. ঘূর্ণন কাহাকে বলে ? চিত্র দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

14. $\overline{AB}$ একটি রেখাংশ। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ইহাকে 30°, 50°, 70°, 108°, 150°, 180° ও 270° ঘুরাইলে চিত্রটি কিরূপ হইবে তাহা অঙ্কন করিয়া দেখাও।

15. আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ইত্যাদিকে যে কোন কৌণিক বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন দিকে ঘুরাইলে চিত্রটি কিরূপ হইবে তাহা অঙ্কন করিয়া দেখাও।

16. একটি সমকোণী ত্রিভুজকে লম্বের চারিদিকে ঘুরাইলে কি চিত্র পাইবে ? অতিভুজকে অক্ষ করিয়া ইহাকে ঘুরাইলে বা কি চিত্র পাইবে ?

17. ABCD আয়তক্ষেত্রকে CD রেখার চারিদিকে ঘুরাইয়া কি চিত্র পাইবে ?

18. প্রতিসাম্য কাহাকে বলে ? প্রতিসাম্য অক্ষরেখা বলিতে কি বুঝ ?

19. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, উহার শীর্ষ বিন্দু ও ভূমি সংযোজক সরলরেখার উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। চিত্র দ্বারা দেখাও।

20. আয়তক্ষেত্র ও বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষরেখা নির্ণয় কর।

21. সমবাহু ত্রিভুজ, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্র বলিতে কি বোঝ ?

22. সমবাহু ত্রিভুজকে কেন্দ্রের চারিদিকে 120° ঘূর্ণন দিলে চিত্র কিরূপ হইবে ? অঙ্কন করিয়া দেখাও।

23. কোন বর্গক্ষেত্রকে কেন্দ্রের চারিদিকে কত ডিগ্রী ঘূর্ণন দিলে উহা নিজ অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে। চিত্র দ্বারা দেখাও।

24. সামান্তরিক ও বৃত্তের ক্ষেত্রে 23 প্রশ্নের ন্যায় কত কত ডিগ্রী ঘুরাইলে ইহারা পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে ?

25. জ্যামিতিক চিত্রের সর্বসমতা কাহাকে বলে ? চিত্র দ্বারা দেখাও।

26. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইবে কি কি সর্তে ? তাহা লেখ ও চিত্র দ্বারা দেখাও।

27. সমান্তরাল সরণ ও ঘূর্ণনের সমন্বয় কি ? এই দুই প্রণালী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করিয়া দেখাও।

28. S S S উপপাদ্য কিরূপে সমন্বয় দ্বারা দেখাইবে ?

29. প্রতিফলনের সমন্বয় কি ? চিত্র দ্বারা বুঝাও।

30. $M_p M_p = M_p^2$ বলিতে কি বুঝ ?

31. প্রতিফলন দ্বারা ঘূর্ণন প্রক্রিয়া কিরূপে বর্ণনা করিবে ? চিত্র দ্বারা বুঝাও।

দ্বিতীয় অধ্যায়

কোণ সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

সম্পাদ্য হইল অঙ্কন মূলক প্রতিজ্ঞা। কোণ বিষয়ক সম্পাদ্য আলোচনা করিবার পূর্বে নিম্নলিখিত জ্ঞাতব্য বিষয় আলোচিত হইল।

27. কোণসম্বন্ধীয় স্বতঃসিদ্ধ

একটি সরলরেখা অন্য একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা একযোগে দুই সমকোণের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত। (1) কোন প্রদত্ত সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার একই পার্শ্বে যদি কতগুলি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় তাহা হইলে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

(2) দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা একযোগে চারি সমকোণের সমান।

(3) যে কোনও সংখ্যক সরলরেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

28. সম্পূরক ও পূরক কোণ।

যদি দুইটি কোণ একযোগে দুই সমকোণের সমান হয় তাহা হইলে উহাদের প্রত্যেককে অপরের সম্পূরক (supplementary) কোণ বলে।

যদি দুইটি কোণ একযোগে এক সমকোণের সমান হয় তাহা হইলে উহাদের প্রত্যেককে অপরের পূরক (complementary) কোণ বলে।

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ হয় তবে $\angle A$, $\angle B$ এর বা $\angle B$, $\angle A$ এর সম্পূরক কোণ।

আবার, $\angle A + \angle B = 90^\circ$ হয় তবে $\angle A$, $\angle B$ এর বা $\angle B$, $\angle A$ এর পূরক কোণ।

অতএব,

(i) সমান সমান কোণের বা একই কোণের সম্পূরক কোণসমূহ পরস্পর সমান।

(ii) সমান সমান কোণের বা একই কোণের পূরক কোণসমূহ পরস্পর সমান।

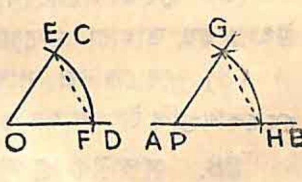
(iii) সূক্ষ্মকোণের সম্পূরক স্থূলকোণ এবং স্থূলকোণের সম্পূরক সূক্ষ্মকোণ।

(iv) পূরক কোণ মাত্রই সূক্ষ্মকোণ।

সম্পাদ্য 1.

একটি সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

AB একটি সরল রেখা এবং P উহার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। COD একটি নির্দিষ্ট কোণ। AB সরল রেখার P বিন্দুতে $\angle COD$ এর সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।



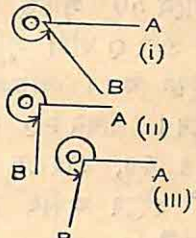
অঙ্কন। Oকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর উহা OC ও ODকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

Pকে কেন্দ্র করিয়া OF এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর ইহা ABকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন Hকে কেন্দ্র করিয়া FEএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর ইহা পূর্বোক্ত চাপটিকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। PG যুক্ত কর। তাহা হইলে $\angle GPH$, $\angle COD$ এর সমান হইল।

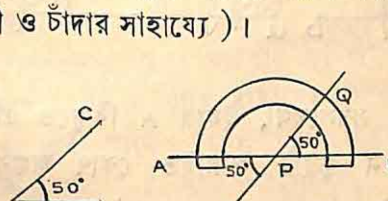
টীকা। একটি প্রবৃদ্ধ কোণের সমান একটি প্রবৃদ্ধ কোণ অঙ্কন করিতে হইলে উপরে আলোচিত অঙ্কন প্রণালী পরোক্ষভাবে প্রয়োগ করিতে হইবে।

একটি প্রবৃদ্ধ কোণ $>180^\circ$ কিন্তু $<360^\circ$

$\therefore$ একটি প্রবৃদ্ধ কোণ $=360^\circ-1$ সূক্ষ্ম-কোণ (চিত্র i) অথবা একটি প্রবৃদ্ধ কোণ $=360^\circ-1$ সমকোণ (চিত্র ii) অথবা একটি প্রবৃদ্ধ কোণ $=360^\circ-1$ স্থূলকোণ (চিত্র iii) অর্থাৎ একটি প্রবৃদ্ধ কোণ 360° অপেক্ষা হয় একটি সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ বা স্থূলকোণ দ্বারা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং এই সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ বা স্থূলকোণটি অঙ্কন করিলেই পরোক্ষভাবে প্রবৃদ্ধকোণটি অঙ্কিত করা হইবে। চিত্রে প্রদর্শিত AOB সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ বা স্থূলকোণ অঙ্কন করিলেই AOB প্রবৃদ্ধ কোণটি (তীর চিহ্নিত) অঙ্কন করা হইবে।



উদাহরণ 1. একটি সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এমন দুইটি কোণ অঙ্কন কর যাহারা পরস্পর বিপ্রতীপ (মাপনী ও চাঁদার সাহায্যে)।

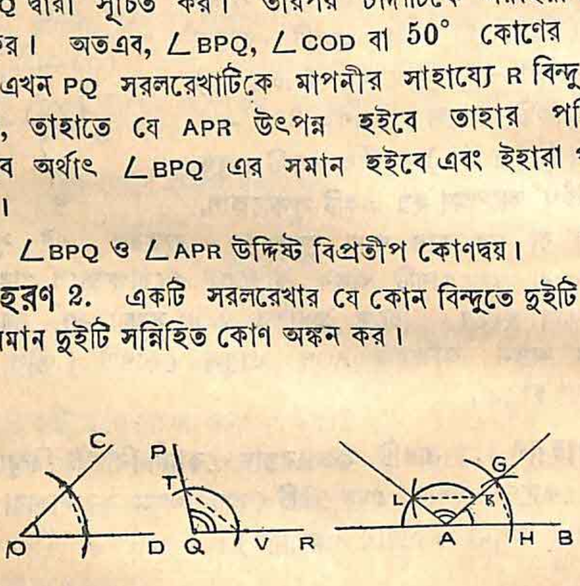


AB একটি সরলরেখা এবং P ইহার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। COD একটি নির্দিষ্ট কোণ (ধর 50°)। AB সরলরেখার P বিন্দুতে $\angle$COD এর সমান এমন দুইটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে যাহারা পরস্পর বিপ্রতীপ।

অঙ্কন। চাঁদাটি AB এর উপর এমন ভাবে রাখ যেন চাঁদাটির ব্যাস (অর্থাৎ সর্বনিম্ন ধার) AB সরলরেখা বরাবর থাকে ও তাহার কেন্দ্র P বিন্দুর উপর স্থাপিত হয়। এখন চাঁদার পরিধিতে যেখানে 50° সূচিত আছে তথায় কাগজের উপর একটি বিন্দু চিহ্ন দাও এবং Q দ্বারা সূচিত কর। তারপর চাঁদাটিকে সরাইয়া P ও Q সংযুক্ত কর। অতএব, $\angle$BPQ, $\angle$COD বা 50° কোণের সমান হইবে। এখন PQ সরলরেখাটিকে মাপনীর সাহায্যে R বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, তাহাতে যে APR উৎপন্ন হইবে তাহার পরিমাণও 50° হইবে অর্থাৎ $\angle$BPQ এর সমান হইবে এবং ইহারা পরস্পর বিপ্রতীপ।

$\therefore$ $\angle$BPQ ও $\angle$APR উদ্দিষ্ট বিপ্রতীপ কোণদ্বয়।

উদাহরণ 2. একটি সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে দুইটি নির্দিষ্ট কোণের সমান দুইটি সন্নিহিত কোণ অঙ্কন কর।

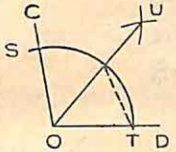


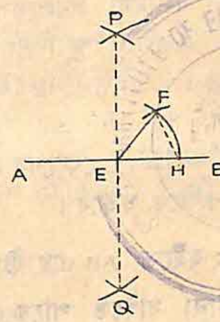
AB একটি সরলরেখা, ইহার A বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle$COD ও $\angle$PQRএর সমান দুইটি সন্নিহিত কোণ অঙ্কন করিতে হইবে (মাপনী ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে)।

সম্পাদ্য 1এ বর্ণিত অঙ্কন অনুযায়ী প্রথমে ABএর A বিন্দুতে $\angle$CODএর সমান $\angle$GAH অঙ্কিত করিয়া AG সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle$PQR এর সমান $\angle$GAL অঙ্কন কর।

$\angle$GAH ও $\angle$GAP উদ্দিষ্ট সন্নিহিত কোণদ্বয়।

উদাহরণ 3. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্য বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের অর্ধাংশের সমান একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।





প্রথমে AB এর মধ্যবিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইবে। স্বভাবতই AB যে বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় সেই বিন্দুটিই ইহার মধ্য বিন্দু। ABকে PQ দ্বারা সমানভাবে দ্বিখণ্ডিত করিলে, ABএর মধ্য বিন্দু E পাওয়া যাইবে। এই E বিন্দুতে COD কোণের অর্ধাংশের সমান DOU বা UOC কোণের সমান HEF কোণটি অঙ্কন কর।

অঙ্কন-ইঙ্গিত। (1) P ও Qতে যে দুই দুইটি চাপ পরস্পর ছেদ করিয়াছে তাহাদের কেন্দ্র যথাক্রমে A ও B এবং ব্যাসার্ধ $> \frac{1}{2}$ AB. PQ, ABএর দ্বিখণ্ডক, E ইহার মধ্য বিন্দু।

(2) ST চাপের কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ সুবিধামত দৈর্ঘ্য। U তে যে দুইটি চাপ পরস্পর ছেদ করিয়াছে তাহাদের কেন্দ্র যথাক্রমে S ও T এবং ব্যাসার্ধ ST এর সমান। OU, COD কোণকে সমান ভাবে দ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। $\therefore$ $\angle DOU = \angle UOC$

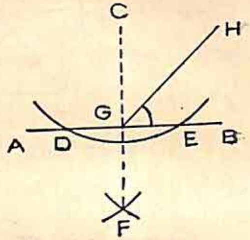
(3) সম্পাদ্য 1 অনুযায়ী E তে TOU বা SOU-এর সমান কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

$\therefore$ HEF উদ্দিষ্ট কোণ।

উদাহরণ 4. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার এমন একটি বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের পূরক কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত

করিতে হইবে যাহা উক্ত সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত।

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C ইহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। AB তে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যাহা C হইতে ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত। এই নির্ণেয় বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণ, ধর 45° এর পূরক অর্থাৎ $45^\circ\ (=90^\circ-45^\circ)$ কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

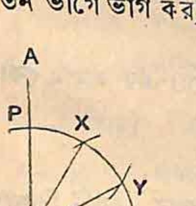


এখন C হইতে AB এর উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যাইতে পারে তার মধ্যে লম্বটির দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম। অতএব C হইতে AB এর উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, সেই লম্ব AB কে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, তাহাই নির্ণেয় বিন্দু। মনে কর G এই নির্ণেয় বিন্দু। G বিন্দুতে 45° কোণের সমান কোণ অঙ্কন কর (চাঁদার সাহায্যে)।

অঙ্কন ইঙ্গিত। (1) DE চাপের কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্ধ $>$ CG. (2) F বিন্দুতে যে দুইটি চাপ পরস্পর ছেদ করিয়াছে তাহাদের কেন্দ্র যথাক্রমে D ও E এবং ব্যাসার্ধ $>\frac{1}{2}$ DE.

29. কোণ সম্বন্ধে কয়েকটি বিশেষ অঙ্কন।

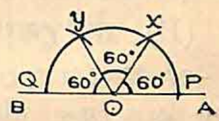
(1) একটি সমকোণকে এমন তিন ভাগে বিভক্ত কর যেন প্রতিটি খণ্ডিত কোণ 30° এর সমান হয় (অর্থাৎ একটি সমকোণকে তিন ভাগে ভাগ কর)



মনে কর AOB একটি সমকোণ। Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং সুবিধামত ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা OA এবং OB বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এইবার P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া

ঐ একই ব্যাসাধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা প্রথমাঙ্কিত চাপকে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিল। XO এবং YO সংযুক্ত কর। তাহা হইলে এই YO এবং XO, AOB সমকোণকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিবে। কারণ, POY, XOQ ত্রিভুজ দুইটি প্রত্যেকে সমবাহু ; ইত্যাদি।

(2) একটি সরল কোণ 180°কে সমান তিন ভাগে ভাগ কর।



AOB একটি সরল কোণ। ইহাকে তিনটি সমান ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

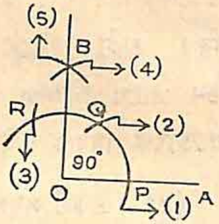
O কে কেন্দ্র করিয়া এবং সুবিধামত ব্যাসার্ধ লইয়া অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা AOBকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ এই অর্ধবৃত্তের ব্যাসে পরিণত হইল। এখন যথাক্রমে P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা পূর্বোক্ত অর্ধবৃত্তকে যথাক্রমে x ও y বিন্দুতে ছেদ করিল। xO এবং yO সংযুক্ত কর। তাহা হইলে এই Ox ও Oy, সরলকোণ POQ (অর্থাৎ AOB)কে সমান তিনভাগে বিভক্ত করিবে এবং প্রতিটি বিভক্ত কোণের পরিমাণ 60° হইবে।

(3) 360°কে সমান ছয় ভাগে ভাগ কর।

উপরে (2)তে যে অর্ধবৃত্তের উল্লেখ করা হইয়াছে তাহাকে সম্পূর্ণ করিলে একটি বৃত্ত পাওয়া যাইবে। এই বৃত্তের পরিধিকে অত্র বর্ণিত অঙ্কন প্রণালী দ্বারা অনুরূপে ছয়টি সমান ভাগে বিভক্ত করিলেই 360°কে সমান ছয় ভাগে অর্থাৎ ছয়টি সমান কোণে বিভক্ত করা হইবে এবং প্রতিটি কোণের পরিমাণ 60° হইবে।

30. নির্দিষ্ট পরিমাণবিশিষ্ট কোণ অঙ্কন।

(A) 90° কোণ



AO সরলরেখার O বিন্দুতে OB লম্ব অঙ্কন করিলে ∠AOB = 90°

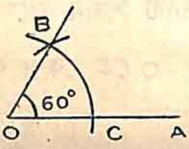
অঙ্কন ইঙ্গিত। (1)-চাপের কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ OP (প্রয়োজনমত);

(2)-চাপের কেন্দ্র P ও ব্যাসার্ধ OP

(3)-চাপের কেন্দ্র Q ও ব্যাসার্ধ OP

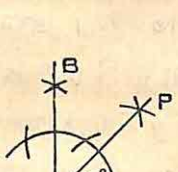
(4) ও (5)-চাপদ্বয়ের কেন্দ্র যথাক্রমে Q ও R ও ব্যাসার্ধ OP.

(B) 60° কোণ



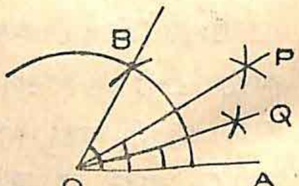
OA সরলরেখাস্থ O বিন্দু ও যে কোন বিন্দু Cকে কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ Bতে ছেদ করিলে ∠BOC = 60° হইবে।

(C) 45° কোণ



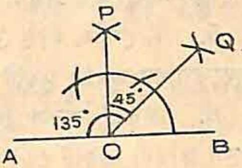
(A) অনুযায়ী ∟AOB = 90° কোণ অঙ্কন করিয়া ইহাকে OP দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিলেই ∠AOP = 45° কোণপাওয়া যাইবে।

(D) 30°, 15° ও $7\frac{1}{2}$°



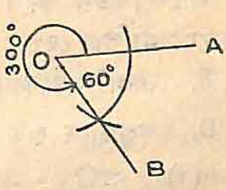
(B) অনুযায়ী অঙ্কিত ∠AOB = 60° কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর, তাহাতে ∠AOP, 30° কোণ এবং ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ∠AOQ, 15° কোণ পাওয়া যাইবে। এই 15° কোণকে সমদ্বিভাগ দ্বারা $7\frac{1}{2}$° কোণ পাওয়া যাইবে।

(E) 135° কোণ



অঙ্কিত লম্ব OP দ্বারা ∠AOB সরল কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া ∠POB সমকোণটিকে পুনরায় OQ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $\angle AOQ = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ পাওয়া যাইবে।

(F) 300° কোণ



প্রদর্শিত অঙ্কন অনুযায়ী $\angle AOB = 60^\circ$ (সূক্ষ্ম) কোণ অঙ্কন করিলে, ∠AOB (প্রবৃদ্ধ) $= 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য। উপরে বর্ণিত প্রণালী অনুযায়ী আরও বিভিন্ন পরিমাণের কোণ অঙ্কন করিতে পারা যায়। যেমন, $22\frac{1}{2}^\circ = \frac{45^\circ}{2}$; $67\frac{1}{2}^\circ = 60^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ$; $75 = 60^\circ + 15^\circ$; $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$; $150^\circ = 120^\circ + 30^\circ$; $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$ ইত্যাদি।

অনুশীলনী

1. 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখার উপর যে কোন C বিন্দুতে 60° কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কন কর (কম্পাসের সাহায্যে)।

2. AB একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুতে দুইটি সমান কোণ অঙ্কন কর।

3. একটি সরলরেখার উপর তিনটি বিন্দুতে 30°, 45° এবং 60° এর সমান কোণ অঙ্কন কর।

4. একটি সরলরেখার উপর কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের অর্ধেকের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন কর।

5. 6 সেমি. দীর্ঘ একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে নির্দিষ্ট দুইটি সূক্ষ্মকোণের সমান দুইটি কোণ অঙ্কন কর।

6. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের দ্বিগুণ করিয়া একটি কোণ অঙ্কন কর।

7. কম্পাসের সাহায্যে 90° কোণ অঙ্কন করিয়া ইহাকে সমান চার অংশে বিভক্ত কর। প্রত্যেক অংশে পরস্পর সমান কিনা চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ।

8. একটি সমকোণকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

9. শূন্যস্থানে শুদ্ধ উত্তর লিখ।

(i) একটি——কোন স্থানকে সীমাবদ্ধ করিতে পারে।

(ii) দুইটি——দ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধ করা অসম্ভব।

(iii) সমান সমান বস্তুর সহিত——যোগ করিলে তাহারা প্রত্যেক পরস্পর——।

(iv) অসমান বস্তুর সহিত——যোগ করিলে যোগফলগুলি——হয়।

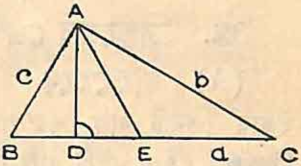
(v) একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া—— ——অঙ্কন করা যায়।

ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

31. ত্রিভুজ। ত্রিভুজের প্রাথমিক বিষয় পূর্বশ্রেণীতে তোমরা অবগত হইয়াছ, ত্রিভুজ তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি সমতল ক্ষেত্র। অতএব একাধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ যত প্রকার সমতল ক্ষেত্র কল্পনা করা যায়, ত্রিভুজ তাহাদের মধ্যে সরলতম। ইহার যে কোন দুই বাহুর একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু আছে এবং তাহা এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে। এই সাধারণ বিন্দুকে ত্রিভুজের শীর্ষ বা কৌণিক বিন্দু বলে। একটি ত্রিভুজের এইরূপ তিনটি শীর্ষ বা

কৌণিক বিন্দু আছে এবং প্রতি শীর্ষে বা কৌণিক বিন্দুতে একটি কোণ অবস্থান করে। এতএব একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ।

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার তিনটি কৌণিক বিন্দু A, B ও Cতে যে তিনটি কোণ অবস্থিত তাহাদিগকে সংক্ষেপে যথাক্রমে A কোণ, B কোণ ও C কোণ এইরূপে অভিহিত করা হয়। এই তিনটি কোণের বিপরীত দিকে বা সম্মুখে অবস্থিত ইহার তিনটি বাহু BC, CA ও AB কে যথাক্রমে a, b ও c এইরূপেও উল্লেখ করা হয়। শীর্ষ বা কৌণিক বিন্দু অনুসারে তাহার বিপরীত দিকস্থ বা সম্মুখীন বাহুকে ভূমি বলে। যদি Aকে শীর্ষ ধরা হয়, তাহা হইলে BC (a) বাহুকে ত্রিভুজের ভূমি রূপে এবং B কোণ ও C কোণকে ভূমি-সংলগ্ন কোণরূপে গণ্য করিতে হইবে। বিপরীত পক্ষে কোনও বাহুকে ভূমি ধরিলে, ঐ বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত অপর দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষ ধরিতে হইবে, যথা BCকে ভূমি ধরিলে, Aকে শীর্ষ ধরা হয়। ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ হইতে সেই শীর্ষ অনুযায়ী ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের উচ্চতা বা উন্নতি (altitude) বলে, যথা AD, A-শীর্ষ হইতে BC-ভূমির উপর লম্ব। কোন শীর্ষ ও উহার বিপরীত দিকস্থ বাহুর মধ্যবিন্দুযোজক সরলরেখাকে ঐ ত্রিভুজের একটি মধ্যমা (median) বলে, যথা AE ; E, BC এর মধ্য বিন্দু। যেহেতু একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ আছে, সুতরাং একটি ত্রিভুজে শীর্ষ অনুযায়ী তিনটি ভূমি, তিনটি উচ্চতা ও তিনটি মধ্যমা থাকা সম্ভব। ভূমি অনুযায়ী ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় নিরূপিত হইবে।

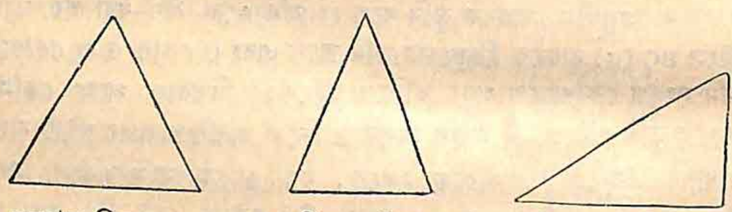


ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অর্থাৎ AB + BC + CAকে প্রদর্শিত ত্রিভুজটির পরিসীমা (perimeter) বলে। ত্রিভুজের একটি সাধারণ শীর্ষে সংযুক্ত বাহুদ্বয়কে **সন্নিহিত বাহুদ্বয়** (adjacent sides) এবং ইহাদের মধ্যে অবস্থিত কোণকে ইহাদের **অন্তর্ভুক্ত**

কোণ (included angle) বলে। A-শীর্ষে সংযুক্ত AB ও AC, সন্নিহিত বাহুদ্বয় ও BAC কোণ, AB ও AC বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ। কোন বাহুর প্রান্তস্থ শীর্ষে অবস্থিত কোণকে ইহার সন্নিহিত (adjacent) কোণ বলে। ত্রিভুজের কোন বাহু তৎসংলগ্ন শীর্ষদ্বয়ের যে কোন একটির অভিমুখে বহিঃদিকে বর্ধিত করিলে, ঐ ত্রিভুজের একটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়। প্রতি ত্রিভুজের এইরূপ ছয়টি বহিঃকোণ আছে।

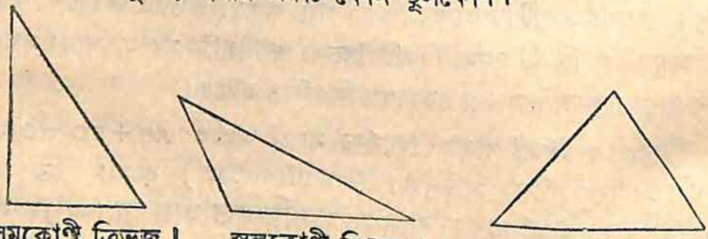
32. ত্রিভুজের শ্রেণী বিভাগ।

(A) **বাহুভেদে।** (i) সমবাহু (equilateral) ত্রিভুজ; ইহার তিনটি বাহু পরস্পর সমান। (ii) সমদ্বিবাহু (isosceles) ত্রিভুজ ; ইহার দুইটি বাহু পরস্পর সমান। (iii) বিষমবাহু (scalene) ত্রিভুজ ; ইহার তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান।



সমবাহু ত্রিভুজ। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। বিষমবাহু ত্রিভুজ।

(B) **কোণভেদে।** (i) সমকোণী (right angled) ত্রিভুজ ইহার একটি কোণ সমকোণ (ii) সূক্ষ্মকোণী (acute angled) ত্রিভুজ ; ইহার তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ। (iii) স্থূলকোণী (obtuse angled) ত্রিভুজ ; ইহার একটি কোন স্থূলকোণ।



সমকোণী ত্রিভুজ। স্থূলকোণী ত্রিভুজ। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

যে ত্রিভুজের কোণগুলি সমান তাহাকে সদৃশ কোণ (equi-angular) ত্রিভুজ বলে। সদৃশ কোণ ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী।

দ্রষ্টব্য। (i) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু অর্থাৎ সাধারণ বিন্দুকে ইহার শীর্ষ-বিন্দু ধরা হয় এবং শীর্ষবিন্দুস্থ কোণকেই ইহার শীর্ষকোণ (vertical angle) বলে। অতএব এই শীর্ষকোণের বিপরীত বাহুকেই ইহার ভূমিরূপে গণ্য করা হয় এবং এই ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান, প্রতিসাম্য দ্বারা তাহা প্রমাণ করা যায়।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ (hypotenuse) বলে। অতিভুজসংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটিকে সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

(iii) সমবাহু ত্রিভুজের কোণত্রয় পরস্পর সমান; ঘূর্ণন প্রতিসাম্য দ্বারা ইহা প্রমাণ করা যায়।

(iv) কোন ত্রিভুজে মাত্র একটি সমকোণ বা স্থূলকোণ থাকিতে পারে। ত্রিভুজের অন্য কোণ দুইটি সর্বত্রই সূক্ষ্মকোণ হইবে।

(v) বিষমবাহু ত্রিভুজের কোণ তিনটি পরস্পর অসমান।

33. ত্রিভুজের বিভিন্ন ধর্ম।

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ পরস্পর সম্বন্ধবিশিষ্ট। সম্বন্ধগুলি নিম্নে প্রদত্ত হইল। এই সম্বন্ধগুলি দ্বারা ত্রিভুজের ধর্ম নির্ণীত হয়।

1. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি ও অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা যথাক্রমে বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর।

2. ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাণের সমষ্টি 180°.

3. ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, তাহাদের বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

4. ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে, তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

5. ত্রিভুজের কোন দুইটি বাহু যদি পরস্পর অসমান হয়, তাহা হইলে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণটি, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

6. ত্রিভুজের কোন দুইটি কোণ যদি পরস্পর অসমান হয়, তাহা হইলে বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু, ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

7. কোন ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

34. ত্রিভুজ অঙ্কন।

ত্রিভুজ মাত্রই ছয় অঙ্গবিশিষ্ট এবং এই অঙ্গভেদে অর্থাৎ বাহুভেদে ও কোণভেদে, ছয় প্রকার ত্রিভুজ কল্পনা করা যায়। সুতরাং এই ছয় প্রকার ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব। এখন ইহাদের যে কোন একটির অনুরূপ আকৃতি ও প্রকৃতি বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইলে, এই দুইটি ত্রিভুজের (যেটি অঙ্কন করা হইবে এবং যাহার অনুরূপ অঙ্কিত হইবে) পরস্পর সর্বাংশে সমান বা সর্বসম (equal in all respects or congruent) হওয়া প্রয়োজন, অর্থাৎ একটিকে অন্যটির উপর স্থাপন * করিলে, যদি উভয়ের ছয় অঙ্গ, অনুরূপ বাহুতে বাহুতে ও অনুরূপ কোণে কোণে পরস্পর সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায় বা সর্বাংশে সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সর্বসম হইবে। সর্বসম ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলও পরস্পর সমান হয়।

---

* এইরূপ স্থাপন প্রক্রিয়াকে উপরিপাতন (su perposition) বলে। দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয়কে অনুরূপ (corresponding) কোণ এবং সমান সমান কোণের বিপরীত অনুরূপ বাহু বলা হয়।

অতএব কোন ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ যদি দেওয়া থাকে, তাহা হইলে ত্রিভুজটির আকৃতি ও প্রকৃতি কিরূপ হইবে তাহা অতি সহজেই নিরূপণ করা যায়। কিন্তু সর্বক্ষেত্রে এইরূপে ছয়টি অঙ্গ দেওয়া নাও থাকিতে পারে। সেরূপ ক্ষেত্রে কমপক্ষে নিম্নলিখিত তিনটি অংশ, অঙ্গ বা উপাত্ত (data) একান্ত প্রয়োজন এবং এইরূপ তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে একটি নির্দিষ্ট আকৃতি ও প্রকৃতি বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইবে। এই প্রদত্ত অঙ্গত্রয় সর্বক্ষেত্রেই পূর্ববর্ণিত সম্বন্ধবিশিষ্ট ও উপযুক্ত হইবে।

(1) তিনটি বাহু।

(2) দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ।

(3) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু।

(4) অতিভুজ এবং যে কোন একটি বাহু (সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে)

আবার মাত্র তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে ঐ প্রদত্ত কোণের সাহায্যে ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে। এরূপ স্থলে নির্দিষ্ট কোন ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না।

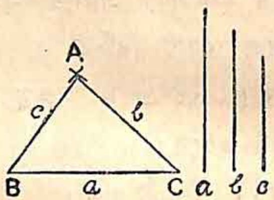
পরিশেষে, দুইটি বাহু এবং উহাদের একের বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ নির্ণয়ের পক্ষে প্রয়োজনানুরূপ অংশসমূহ বিদ্যমান না থাকায়, ত্রিভুজ উৎপন্ন হইতে পারে বা নাও হইতে পারে। এরূপ ক্ষেত্রে (1) কোন ত্রিভুজই না পাওয়া যাইতে পারে, (2) মাত্র একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইতে পারে বা (3) স্থল বিশেষে দুইটি ত্রিভুজও পাওয়া যাইতে পারে।

শেষোক্ত স্থলে একটির বেশি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবার সম্ভাবনা থাকায় উহাকে **দ্ব্যর্থক স্থল** (ambiguous case) বলা হয়।

সম্পাদ্য 2.

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

a, b ও c তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখা। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার তিনটি বাহু যথাক্রমে a, b ও c সরল রেখার সমান হইবে।



অঙ্কন। aএর সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট BC সরল রেখা অঙ্কিত কর। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং cএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। পুনরায় C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং bএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর ইহা যেন প্রথম চাপটিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC সংযুক্ত কর।

এখন ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

মন্তব্য। (i) প্রদত্ত বাহুত্রয় পরস্পর সমান হইলে অঙ্কিত ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

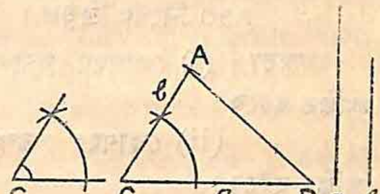
(ii) প্রদত্ত বাহুত্রয়ের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, অঙ্কিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

(iii) প্রদত্ত বাহুত্রয় পরস্পর অসমান হইলে, অঙ্কিত ত্রিভুজটি বিষমবাহু হইবে (উপরে অঙ্কিত ত্রিভুজটি বিষমবাহু ত্রিভুজ)।

সম্পাদ্য 3.

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং C একটি নির্দিষ্ট কোণ ; এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুই বাহু ও a ও b এর সমান এবং a ও b এর অন্তর্ভূত কোণ C এর সমান।



অঙ্কন। aর সমান করিয়া CB একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। C বিন্দুতে C কোণের সমান করিয়া BCA কোণ অঙ্কিত কর। CAকে bএর সমান করিয়া কাটিয়া লও। AB যুক্ত কর। ∴ ABC নির্ণেয়ত্রিভুজ।

মন্তব্য। (i) বাহু দুইটি পরস্পর সমান হইলে, অঙ্কিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

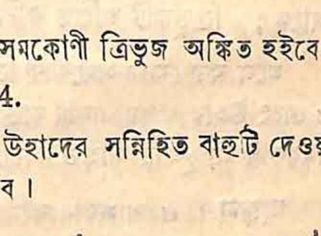
(ii) বাহু দুইটি পরস্পর অসমান হইলে, অঙ্কিত ত্রিভুজটি বিষমবাহু হইবে।

(iii) অন্তর্ভূত কোণ $90°$ হইলে, সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

সম্পাদ্য 4.

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত বাহুটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর ∠B ও ∠C দুইটি নির্দিষ্ট কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু aর সমান এবং উহার সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে ∠B ও ∠Cএর সমান হইবে।



অঙ্কন। BC সরল রেখা aএর সমান করিয়া লও এবং B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ∠B ও ∠Cএর সমান করিয়া ∠CBA ও ∠BCA অঙ্কিত কর। মনে কর BA ও CA, A বিন্দুতে ছেদ করিল।

∴ ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য। (i) কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

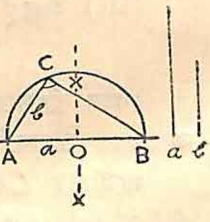
(ii) কোণদ্বয় পরস্পর অসমান হইলে, বিষমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

(iii) কোণদ্বয় পরস্পর 60° এর সমান হইলে, সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

(vi) কোণদ্বয় পরস্পর 45° এর সমান হইলে সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

সম্পাদ্য 5.

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং উহার অপর একটি বাহু b দেওয়া আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

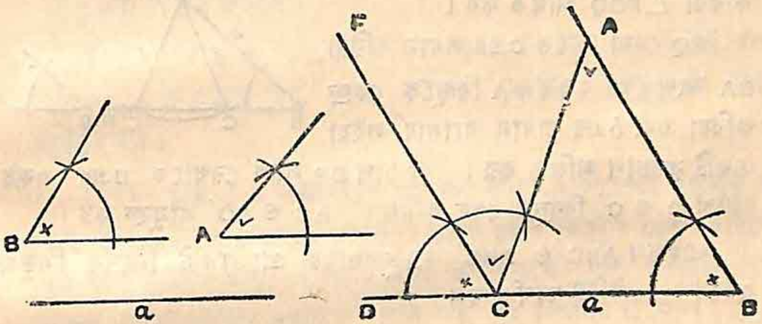
অঙ্কন। aএর সমান করিয়া AB সরল রেখা লও। AB সরল রেখাকে O বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OAএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং bএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ অর্ধবৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC সংযুক্ত কর।

এক্ষণে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ এবং উহার ∠ACB সমকোণ।

সম্পাদ্য 6.

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them.



মনে কর কোন ত্রিভুজের A ও B দুইটি নির্দিষ্ট কোণ এবং 'a', A কোণের বিপরীত বাহু ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

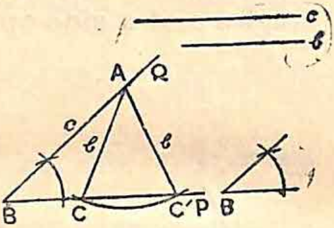
অঙ্কন। DCB যে কোন একটি সরল রেখা টান, উহা হইতে 'a'র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B বিন্দুতে B কোণের সমান করিয়া CBA কোণ অঙ্কিত কর। পুনরায় C বিন্দুতে B কোণের সমান করিয়া DCF কোণ অঙ্কিত কর। এখন FC সরল রেখার C বিন্দুতে A কোণের সমান করিয়া FCA কোণ অঙ্কিত কর। মনে কর CA এবং BA সরল রেখাদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ∴ ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

দ্রষ্টব্য। উপরি উক্ত ত্রিভুজের A ও B কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে ক্ষুদ্রতর হওয়া আবশ্যক।

সম্পাদ্য 7.

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

b ও c দুইটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং ∠B একটি নির্দিষ্ট কোণ।



অঙ্কন। যে কোন BP সরল রেখা লও। B বিন্দুতে ∠B কোণের সমান করিয়া ∠PBQ অঙ্কিত কর।

BQ রেখা হইতে cএর সমান করিয়া BA অংশ ছেদ কর। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং bএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। ঐ চাপ BP সরল রেখাকে Bএর একই পার্শ্বে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও AC′ সংযুক্ত কর।

এইরূপ ABC ও ABC′ ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেকটি নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। এইটিই দ্ব্যর্থক স্থল।

মন্তব্য। (i) যদি ∠B সূক্ষ্মকোণ হয় এবং যদি b, A হইতে BP রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে অঙ্কিত বৃত্তটি BP রেখাকে আদৌ ছেদ করিবে না। এস্থলে কোন ত্রিভুজই সম্ভব হইবে না।

(ii) যদি ∠B **সূক্ষ্মকোণ** হয়, এবং b, A হইতে BP রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের **সমান** হয়, তাহা হইলে বৃত্তটি BP রেখাকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ (স্পর্শ) করিবে। এস্থলে **একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব হইবে**।

(iii) যদি ∠B **সূক্ষ্মকোণ** হয় এবং যদি b, A হইতে BP রেখার উপর অঙ্কিত **লম্ব অপেক্ষা বৃহত্তর** কিন্তু c **অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর** হয়, তাহা হইলে বৃত্তটি BP সরল রেখাকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং উভয় বিন্দুই B বিন্দুর একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকিবে। মনে কর,

ঐ বিন্দুদ্বয় C ও D, তাহা হইলে ABC ও ABD এই দুইটিই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। সুতরাং এস্থলে **দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে** এবং ইহাকেই **দ্ব্যর্থক স্থল** (ambiguous case) বলে।

(iv) যদি ∠B **সূক্ষ্মকোণ** হয় এবং b, cএর **সমান** হয়, তাহা হইলে এই বৃত্তটি BP রেখাকে B ও অন্য একটি বিন্দুতে (মনে কর C বিন্দুতে) ছেদ করিবে তাহা হইলে ABC এই **একটি মাত্র ত্রিভুজই সম্ভব হইবে**।

(v) যদি ∠B **সমকোণ** হয়, এবং যদি b, c এর **সমান** অথবা তদপেক্ষা **ক্ষুদ্রতর** হয়, তাহা হইলে **কোন ত্রিভুজই সম্ভব হইবে না**।

(vi) যদি ∠B **সমকোণ** হয় এবং যদি b, c অপেক্ষা **বৃহত্তর** হয়, তাহা হইলে উক্ত বৃত্তটি BP সরল রেখাকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। এই বিন্দু দুইটির মধ্যে একটি B এর বাম পার্শ্বে এবং অপরটি Bএর দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত হইবে। মনে কর, এই বিন্দুদ্বয় C ও D; তাহা হইলে ABC ও ABD এই উভয়েই আমাদের নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। কিন্তু ইহা **দ্ব্যর্থক স্থল নহে**, কারণ এই **উভয় ত্রিভুজই সর্বসম**।

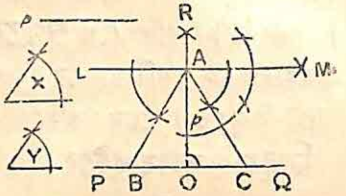
(vii) যদি ∠B স্থূলকোণ হয় এবং যদি b, cএর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে কোন ত্রিভুজই সম্ভব হইবে না।

(viii) যদি ∠B স্থূলকোণ হয় এবং b, c অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে বৃত্তটি BP সরল রেখাকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। ইহাদের মধ্যে একটি Bএর দক্ষিণ পার্শ্বে এবং অপরটি উহার বাম পার্শ্বে অবস্থিত হইবে। যদি এই বিন্দু দুইটি যথাক্রমে C ও D হয়, তাহা হইলে ABC ত্রিভুজই আমাদের নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে, কারণ অপর ত্রিভুজের ∠ABD সূক্ষ্মকোণ। অতএব এস্থলেও একটি মাত্র ত্রিভুজই সম্ভব হইবে।

বিবিধ ত্রিভুজাঙ্কন

উদাহরণ 1. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

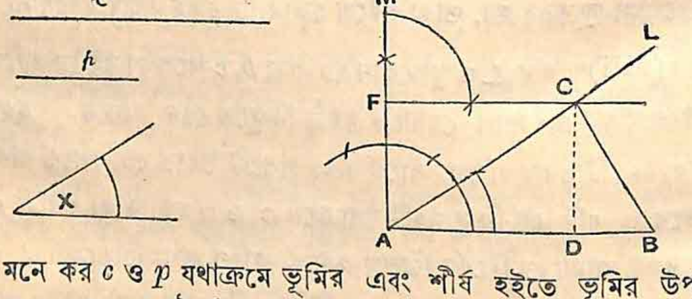
মনে কর ∠X ও ∠Y ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় এবং p, শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের প্রদত্ত দৈর্ঘ্য।



অঙ্কন। যে কোন একটি সরল রেখা PQ লও এবং উহার যে কোন বিন্দু Oতে রেখাটির উপর OR লম্ব টান। OR হইতে pএর সমান করিয়া OA কাটিয়া লও। A বিন্দু দিয়া PQএর সমান্তরাল LAM সরল রেখা টান। ∠X এর সমান করিয়া ∠LAB এবং ∠Y এর সমান করিয়া ∠MAC অঙ্কন কর ; AB ও AC বাহুদ্বয় যেন PQকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

উদাহরণ 2. ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব এবং ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle, having given the base, the perpendicular from the vertex to the base and one of the base angles.]

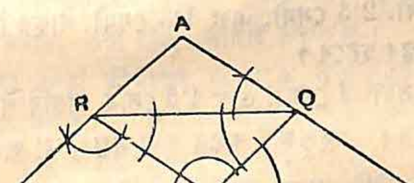


মনে কর c ও p যথাক্রমে ভূমির এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের প্রদত্ত দৈর্ঘ্য এবং x প্রদত্ত কোণ।

অঙ্কন। c এর সমান দীর্ঘ AB সরল রেখা অঙ্কিত কর। A বিন্দুতে x কোণের সমান করিয়া ∠BAL অঙ্কিত কর এবং ABএর উপর AM লম্ব অঙ্কিত কর। AM হইতে pএর সমান করিয়া AF অংশ কাটিয়া লও। F বিন্দুতে ABএর সমান্তরাল করিয়া FC সরল রেখা টান। মনে কর FC, ALকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। CB সংযুক্ত কর। তাহা হইলে △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

উদাহরণ 3. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুর অবস্থিতি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[To construct the triangle having given the middle points of the three sides.]



মনে কর P, Q, R কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু। এই ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। QR, RP এবং PQ সংযুক্ত কর। P বিন্দুর মধ্য দিয়া QRএর সমান্তরাল করিয়া একটি সরল রেখা আঁক। এইরূপে Q এবং R বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে RP এবং PQএর সমান্তরাল করিয়া আরও দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। মনে কর এই তিনটি সরল রেখা পরস্পরকে A, B এবং C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর।

(i) 1 সেমী, 1·5 সেমী. এবং 2 সেমী.
(il) 1·5 সেমী, 2·9 সেমী. এবং 3·2 সেমী.
(iii) 2·6 সৌম. 2·8 সেমী. এবং 3 সেমী.
(iv) 3 সেমী. 3 সেমী. এবং 5 সৌম.
(v) 4 সেমী. 3·8 সেমী. এবং 5·7 সেমী.

2. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর ঃ

(i) 3·7 মিমী., (ii) 4 সেমী. (iii) 5·6 সেমী. (vi) 7·2 সেমী.

3. 3 সেমী. 3·5 সেমী. ও 4 সেমী. বাহুবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অঙ্কন কর।

4. 4 সেমী. 2·5 সেমী. এবং 1·5 সেমী. বাহুর দৈর্ঘ্য লইয়া কি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে ?

5. 2·5 সেমী. 2 সেমী. এবং 4·5 সেমি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে চেষ্টা কর। ত্রিভুজটি অঙ্কন করা সম্ভব, না অসম্ভব হইবে ?

6. নিম্নে দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ প্রদত্ত হইল। প্রতিক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

(i) 4 সেমী. 6 সেমী. এবং 45°.
(ii) 4·6 সেমী. 6·2 সেমী. এবং 90°.
(iii) 7 সেমী. 5 সেমী. এবং 135°.
(iv) 4·9 সেমী. 6·4 সেমী. এবং 60°.
(v) 5·1 সেমী. 6·5 সেমী. এবং $72\frac{1}{2}^\circ$.

7. একটি ত্রিভুজের দুই বাহু যথাক্রমে 2·5 সেমী. এবং 4 সেমী. ইহাদের অন্তর্গত কোণ 60°. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ইহার অপর দুইটি কোণের পরিমাপ কত ? ইহার তিনটি কোণের সমষ্টি কত ?

8. AB = BC = 3 সেমী. এবং ∠B = 90° হইলে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ∠A ও ∠C সমান কোণ ?

9. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর যাহার দুই কোণ ও সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ :

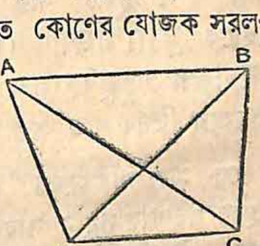
(i) 45°, 90°, 4 সেমী. (ii) 60°, 30°, 4·6 সেমী.
(iii) 50°, 57°, 5·1 সেমী. (iv) 75°, 35°, 5·5 সেমী.

10. নিম্নে দুই কোণ ও প্রথমোক্ত কোণের বিপরীত বাহুর পরিমাণ প্রদত্ত হইল, ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর।

(i) 30°, 45°, 5·5 সেমী. (ii) 45°, 60°, 6·5 সেমী.
(iii) 60°, 30°, 7 সেমী.

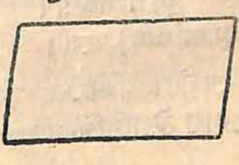
চতুর্ভুজ সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

35. চতুর্ভুজ। পূর্বশ্রেণীতে চতুর্ভুজের (quadrilateral) সহিত তোমাদের পরিচয় হইয়াছে। ত্রিভুজের পরবর্তী যে সরলতম ঋজুরেখ ক্ষেত্র কল্পনা করা যায়, তাহাই চতুর্ভুজ। যে সমতল ক্ষেত্র চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তাহাকে **চতুর্ভুজ** বলে এবং এই চারিটি সরলরেখাকে ইহার ভুজ বা বাহু বলে। প্রতি দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দু বা শীর্ষে একটি কোণ অবস্থান করে। এইরূপে চারিটি শীর্ষে চারিটি কোণ আছে। অতএব চতুর্ভুজ অষ্ট অঙ্গবিশিষ্ট, চারিটি বাহু ও চারিটি কোণ। প্রতি দুইটি বিপরীত কোণের যোজক সরলরেখাকে ইহার **কর্ণ** (diagonal) বলে। প্রতি চতুর্ভুজে দুইটি কর্ণ থাকে।



পাশ্ববর্তী চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং AC ও BD উহার দুইটি কর্ণ।

36. চতুর্ভুজের প্রকার ভেদ।



যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে **সামান্তরিক** (parallelogram) বলে।

দ্রষ্টব্য। অতঃপর প্রমাণিত হইবে যে, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান।

যে সামান্তরিকের একটি কোণ সম-কোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (rectangle) বা সংক্ষেপে **আয়ত** বলে।

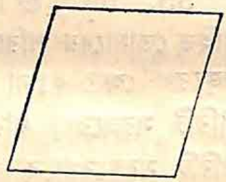


দ্রষ্টব্য। অতঃপর প্রমাণিত হইবে যে, আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ।

যে আয়তক্ষেত্রের চারিটি বাহুই সমান তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (square) বলে।



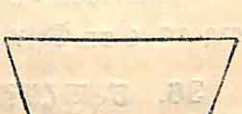
যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহাকে **বিষমকোণী** সমবাহু চতুর্ভুজ বা **রম্বস** (rhombus) বলে।



যে চতুর্ভুজের মাত্র দুইটি বাহু সমান্তরাল, কিন্তু অপর দুইটি বাহু সমান্তরাল নহে, তাহাকে **ট্র্যাপিজিয়ম** (trapezium) বা **দ্বিসমান্তর চতুর্ভুজ** বলে। এই অসমান্তরাল বাহুদ্বয়কে তির্যক বাহু বলে।



যে ট্র্যাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় পরস্পর সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ট্র্যাপিজিয়ম** (isosceles trapezium) বলে।



যে ট্র্যাপিজিয়মের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ সমকোণ তাহাকে সমকোণী ট্র্যাপিজিয়ম বলে।

চারি অপেক্ষা অধিকসংখ্যক সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (polygon) বলে।



যে বহুভুজের সকল বাহু সমান তাহাকে **সমবাহু** (equilateral) বহুভুজ বলে।

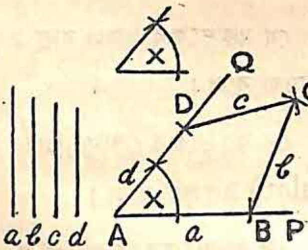
যে বহুভুজের কোণগুলিও সমান তাহাকে **সদৃশকোণ** (equiangular) বহুভুজ বলে।

যে বহুভুজের কোণগুলি সমান এবং বাহুগুলিও সমান তাহাকে **সুষম বহুভুজ** (regular polygon) বলে।

37. চতুর্ভুজ অঙ্কন। একটি ত্রিভুজ ছয় অঙ্গবিশিষ্ট এবং দেখা গিয়াছে যে ইহা নির্দিষ্টরূপে অঙ্কন করিতে তিনটি স্বতন্ত্র ও উপযুক্ত অঙ্গ আবশ্যক। এই হিসাবে ধারণা হওয়া স্বাভাবিক যে একটি চতুর্ভুজ যেহেতু অষ্টঅঙ্গবিশিষ্ট, সুতরাং চারিটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে একটি চতুর্ভুজ নির্দিষ্টরূপে অঙ্কন করা যাইবে, কিন্তু তাহা সম্ভব হয় না। একটি চতুর্ভুজ তাহার যে কোন একটি কর্ণ দ্বারা দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয় এবং ঐ কর্ণটিকে সাধারণ বাহু হিসাবে গ্রহণ করিয়া সংযুক্ত অবস্থায় ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর পরস্পরের বিপরীত দিকে উক্ত চতুর্ভুজের মধ্যে অবস্থান করে। এই ত্রিভুজ দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে অঙ্কন করিতে, তিনটি হিসাবে মোট ছয়টি অঙ্গের প্রয়োজন। কিন্তু যেহেতু ইহাদের একটি অঙ্গ সাধারণ সুতরাং পাঁচটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ দুইটি নির্দিষ্টরূপে অঙ্কন করা যাইবে এবং ইহাদের নির্দিষ্টরূপে অঙ্কন করিলেই চতুর্ভুজটিও নির্দিষ্টরূপে অঙ্কিত হইবে। অতএব একটি চতুর্ভুজ নির্দিষ্টরূপে অঙ্কন করিতে হইলে প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষভাবে প্রদত্ত পাঁচটি স্বতন্ত্র ও উপযুক্ত অঙ্গ বা উপাত্ত আবশ্যক।

সম্পাদ্য 8. চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrilateral having given its four sides and an angle,]



মনে কর a, b, c, d প্রদত্ত বাহু চারিটির দৈর্ঘ্য এবং a ও d বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ x দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

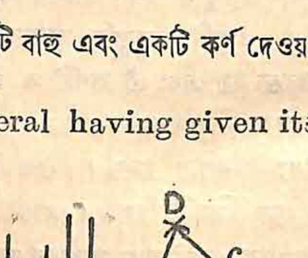
অঙ্কন। যে কোন একটি সরল রেখা AP লও এবং উহা হইতে aএর সমান করিয়া AB অংশ কাট। A বিন্দুতে ∠x এর সমান করিয়া ∠PAQ অঙ্কিত কর। AQ সরল রেখা হইতে dএর সমান করিয়া AD অংশ কাট।

B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও c ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর এই চাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও DC যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 9. কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কর্ণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrilateral having given its four sides and a diagonal.]



মনে কর, কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু a, b, c, d এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য l দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন একটি সরল রেখা AP লও এবং উহা হইতে lএর সমান করিয়া AC অংশ কাট।

A ও Cকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও b ব্যাসার্ধ লইয়া ACএর এক পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর চাপ দুইটি B বিন্দুতে ছেদ করিল।

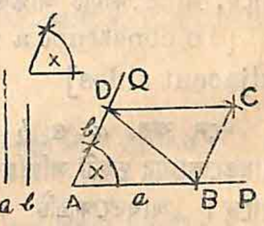
আবার A ও Cকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে d ও c ব্যাসার্ধ লইয়া ACএর যে পার্শ্বে B আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর এই চাপ দুইটি D বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, BC, CD ও DA যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ। অঙ্কনানুসারে, AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$ এবং একটি কর্ণ AC $= l$.

সম্পাদ্য 10. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর a ও b সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ x দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন একটি সরল রেখা AP লও এবং উহা হইতে aএর সমান করিয়া AB অংশ কাট। AB সরল রেখার A বিন্দুতে $\angle$X এর সমান করিয়া $\angle$PAQ অঙ্কিত কর। AQ হইতে bএর সমান করিয়া AD অংশ কাট।

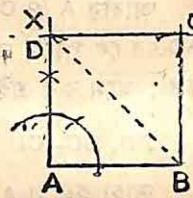
এখন D ও Bকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও b ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; উহারা যেন BDএর যে পার্শ্বে A আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

সম্পাদ্য 11. একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square on a given side.]

মনে কর AB একটি নির্দিষ্ট বাহু; ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।



অঙ্কন। AB বাহুর A বিন্দুতে AX লম্ব অঙ্কিত কর। AX হইতে ABএর সমান করিয়া AD অংশ কাট।

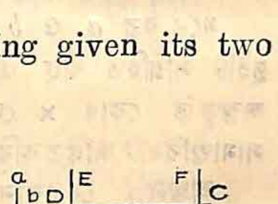
B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। উহারা BDএর যে পার্শ্বে A আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও DC যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

সম্পাদ্য 12. একটি আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a rectangle having given its two adjacent sides]

মনে কর, a ও b কোন একটি আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে। আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



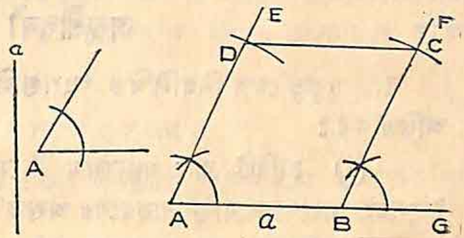
অঙ্কন। যে কোন একটি সরলরেখা AG লও এবং উহা হইতে aএর সমান করিয়া AB অংশ কাট। AB সরলরেখার A ও B প্রান্ত বিন্দুতে যথাক্রমে AE ও BF লম্ব অঙ্কিত কর। AE ও BF হইতে bএর সমান করিয়া যথাক্রমে AD ও BC অংশ কাট। D ও C যুক্ত কর। তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট আয়ত ক্ষেত্র।

অঙ্কনানুসারে, $AB = a = DC$ এবং $AD = b = BC$.

উদাহরণ 1. কোন রম্বসের একটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To construct a rhombus having given one of its sides and an angle.)

মনে কর কোন রম্বসের একটি বাহু a ও একটি কোণ A দেওয়া আছে, রম্বসটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



অঙ্কন। যে কোন একটি সরলরেখা AG লও এবং উহা হইতে a এর সমান করিয়া AB অংশ কাট। AB সরলরেখার A ও B বিন্দুতে ∠A এর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠BAE ও ∠GBF কোণ অঙ্কিত কর।

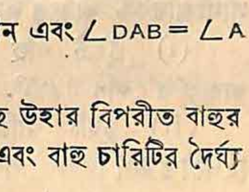
এখন a এর সমান করিয়া AE হইতে AD অংশ ও BF হইতে BC কাট এবং D ও C যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট রম্বস।

অঙ্কনানুসারে, ইহার প্রতিটি বাহু a এর সমান এবং ∠DAB = ∠A (প্রদত্ত)।

উদাহরণ 2. কোন চতুর্ভুজের একটি বাহু উহার বিপরীত বাহুর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাণ এবং বাহু চারিটির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

[ইঙ্গিত—মনে কর a,b,c,d যথাক্রমে চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং b ও dএর মধ্যবর্তী কোণ ∠X. ∠PBC = ∠X আঁক, BC = b এবং BP = d লও। এখন P ও Cকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও cএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; উহারা যেন D বিন্দুতে পরস্পর



ছেদ করিল। এখন, B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও d ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর; উহারা যেন A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। ABCDই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

অনুশীলনী

1. চতুর্ভুজের নিম্নলিখিত অংশগুলি দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর:

(i) চারিটি বাহু যথাক্রমে 3 সেমী., 5 সেমী., 6 সেমী. ও 7 সেমী. এবং প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ 60°,

(ii) তিনটি বাহু যথাক্রমে 2·5 সেমী., 3·5 সেমী. ও 3 সেমী. এবং উহাদের অন্তর্গত কোণদ্বয় যথাক্রমে 90° ও 45°,

(iii) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ,

(vi) দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং তৎসংলগ্ন তিনটি কোণ,

(v) একটি বাহু, ঐ বাহুসংলগ্ন দুই কোণ এবং দুইটি কর্ণ।

2. সামান্তরিকের নিম্নলিখিত অংশগুলি দেওয়া আছে; সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর:

(i) দুইটি. বাহু যথাক্রমে 3 সেমী. ও 2 সেমী. এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ 22·5°.

(ii) দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের বিপরীত কর্ণ।

3. একটি আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে 4 সেমী. ও 2 সেমী. আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

4. একটি রম্বসের একটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে; রম্বসটি অঙ্কিত কর।

5. একটি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু 5 সেমী., বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

পরিশিষ্ট

38. দুই বা ততোধিক কোণ পরস্পর সমান বা তাহাদের সমষ্টি, পরিমাণের দিক হইতে কত সমকোণের সমান, তদসংক্রান্ত কতিপয় ক্ষেত্রের উল্লেখ করা হইল।

(1) সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

(2) দুইটি কোণের একটি অপরটির পূরক হইলে তাহাদের সমষ্টি এক সমকোণের সমান।

(3) দুইটি কোণের একটি অপরটির সম্পূরক হইলে তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

(4) একটি সরলরেখার উপর আর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

(5) দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণের সমান।

(6) কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডক দুইটির মধ্যবর্তী বা অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণের সমান।

(7) একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান (180°)।

(8) সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি এক সমকোণের সমান।

(9) একটি চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণ (360°)

(10) একটি বর্গক্ষেত্রের বা আয়তক্ষেত্রের চারিটি কোণ পরস্পর সমান ও প্রতিটি এক সমকোণ।

(11) একটি সামান্তরিকের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান এবং ইহার বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

(12) একটি বৃত্তের কেন্দ্রের সম্পূর্ণ কোণ চারি সমকোণের (360°) সমান।

(13) অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রের কোণ দুই সমকোণের সমান।

(14) বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

(15) সমান সমান কোণের সম্পূরক কোণসমূহ পরস্পর সমান।

(16) সমান সমান কোণের পূরক কোণসমূহ পরস্পর সমান।

(17) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

(18) সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান।

(19) কোন ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।